ZUR GEOMETRIE
DER ZWEIDIMENSIONALEN
NICHT - METRISCHEN ENTFALTUNG

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der
Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften
durch die
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

GÜNTER BRACKLY

aus

TRIER

BONN 1985

ZUR GEOMETRIE
DER ZWEIDIMENSIONALEN
NICHT - METRISCHEN ENTFALTUNG

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der
Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften
durch die
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

GÜNTER BRACKLY

aus

TRIER

BONN 1985

Angefertigt mit Genehmigung der Rechts- und Staatswissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Referent Prof. Dr. Peter Schönfeld

2. Referent Prof. Dr. Bernhard Korte

Tag der mündlichen Prüfung: 28. 06. 1985

Druck: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Einleitung		5
Kapitel 1	Entfaltung: Historische und inhaltliche Entwicklung einer multivariaten Analysemethode	9
	1.1 Die eindimensionale Entfaltung	9
	1.2 Multidimensionale Verallgemeinerung	14
	1.3 Zusammenhang zwischen Entfaltung und Multidimensionaler Skalierung	2o
	1.4 Die Hierarchie der verschiedenen Entfaltungsmodelle	26
Kapitel 2	Zweidimensionale Entfaltung: Erste Untersuchungen und eine Anwendung	3o
	2.1 Zerlegung des R^2 in Rangfolgengebiete	3o
	2.2 Das vollständige System der Rangfolgengebiete	33
	2.3 Anwendung: Vergleich der Entfaltungsprogramme ALSCAL und MDSCAL	4o
	2.4 Zusammenfassung: Bewertung der Entfaltungsprogramme und Schlußfolgerungen	5o
	2.5 Anhang: Die von den getesteten Programmen errechneten jeweils besten Darstellungen	54
Kapitel 3	Konstruktive Lösung des zweidimensionalen Entfaltungsproblems bei vorgegebenem *vollständigen* Rangfolgensystem	69
	3.1 Die Sektoren	69
	3.2 Der Aufbau der Objektkonfiguration als Extremalpunkte ineinandergeschachtelter Polygonschalen	72

Seite

3.3 Die qualitative Anordnung der Konfigurationspunkte auf den einzelnen Polygonschalen 77

3.4 Die abhängige Orientierung der einzelnen Polygonschalen 87

3.5 Geometrische Beschränkung der quantitativen Lage der Objektpunkte 95

3.6 Zusammenfassung: Lösung des Entfaltungsproblems durch die qualitative und quantitative Beschreibung der Objektkonfiguration 108

3.7 Exkurs: Zur Klassifikation qualitativ verschiedener ebener Entfaltungskonfigurationen 110

Kapitel 4 Konstruktive Lösung des zweidimensionalen Entfaltungsproblems bei vorgegebenem *unvollständigen* Rangfolgensystem 119

4.1 Entfaltungskonfigurationen im R^{n-1} 120

4.2 Die Geometrie der Mittelsenkrecht-Hyperebenen zu K_n^* und ihr Schnittverhalten mit affinen Ebenen im R^{n-1} 130

4.3 Geradensysteme als Schnitte von affinen Ebenen mit der Konfiguration der Mittelsenkrecht-Hyperebenen zu K_n^* 140

4.4 Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an affine Ebenen im R^{n-1} zur Darstellbarkeit ebener Rangfolgensysteme 145

4.5 Zusammenfassung: Lösung des Entfaltungsproblems durch zulässige Komplettierung des vorgegebenen unvollständigen Rangfolgensystems 155

Literaturverzeichnis 157

Lebenslauf 158

Einleitung

Die nicht-metrische Entfaltung ist ein Verfahren im Rahmen der multivariaten Datenanalyse, das eine visuelle Analyse von ordinalen Daten ermöglichen soll: Es sei eine Menge von n Objekten, $O_1,..,O_n$, und eine Menge von m Subjekten, $S_1,...,S_m$, vorgegeben, und für jedes Subjekt S_i Bewertungen $s_{i1},...,s_{in}$ der n Objekte. Im ökonomischen Kontext können beispielsweise die Objekte Länder, die Subjekte Branchen, und die Bewertungen die Investitionszahlen der einzelnen Branchen in den Ländern sein. Bei Anwendung der nicht-metrischen Entfaltung geht man davon aus, daß die absoluten Werte der Bewertungen s_{ij} keine Rolle spielen, daß sie lediglich eine Aussage über die Rangordnungen der einzelnen Objekte durch jedes Subjekt zulassen. Man hat also eine Menge von m Rangordnungen $s_{ij_1} > ... > s_{ij_n}$, i = 1,..,m , vorgegeben, d.h. für jedes Subjekt S_i eine Rangfolge der n Objekte:

$$S_i: \quad O_{ij_1} \ldots O_{ij_n} \text{ , entsprechend } s_{ij_1} > \ldots > s_{ij_n}$$

Gesucht ist nun in einem möglichst niedrig-dimensionalen Raum R^r eine Konfiguration von n Objektpunkten und eine Konfiguration von m Subjektpunkten, so daß die Folge der euklidischen Abstände von jedem Subjektpunkt S_i zu allen Objektpunkten O_j den vorgegebenen Rangordnungen entspricht:

$$S_i: \quad O_{ij_1} .... O_{ij_n} \text{ , entsprechend } d(S_i,O_{ij_1}) > \ldots > d(S_i,O_{ij_n})$$

Ist eine solche Darstellung gefunden, so soll die den Objekten durch die Bewertungen der Subjekte auferlegte Struktur per Auge analysiert werden können. Dies beinhaltet, daß der Darstellungsraum der beiden Konfigurationen im Idealfall zweidimensional, maximal aber dreidimensional sein sollte.

Die Anordnung der Objekte durch '>' ist willkürlich und kann ebensogut durch '<' vorgenommen werden, wie es auch C. H. Coombs in seiner Arbeit von 1950 getan hat.

Dieses Verfahren wurde 1950 von C. H. Coombs für den eindimensionalen Fall entwickelt und in den folgenden Jahren auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinert. Einen kurzen Abriss der historischen Entwicklung haben wir in Kapitel 1 zusammengestellt.

Es gibt inzwischen eine ganze Reihe von iterativen Programmen, die das Entfaltungsproblem, also die Bestimmung der Objekt- und Subjektkonfigurationen im R^2 oder R^3, zu lösen versuchen, und zwar durch Minimieren einer Zielfunktion: Da nur die ordinale Information der Daten, also die Rangordnungen bzgl jedes Subjekts zur Verfügung stehen, können die Ausgangsdaten (zeilenweise) monotonen Transformationen unterworfen werden. Gesucht ist dann eine Konfiguration der Objekt- und Subjektpunkte, und monotone Transformationen, so daß die Distanzfolge jedes Subjektpunktes zu allen Objektpunkten den monotonen Transformationen der Ausgangsdaten (den sogenannten *Disparitäten*) möglichst gut entspricht. Die Zielfunktion ist bei allen iterativen Programmen im wesentlichen eine Funktion in den Distanzen und den Disparitäten. Das Programm ALSCAL etwa ist ein zweistufiges Verfahren, das ausgehend von einer Startkonfiguration in jeder Iteration in zwei Schritten die Zielfunktion einmal bzgl der Distanzen und dann bzgl der Disparitäten minimiert. Demgegenüber verwendet MDSCAL beispielsweise ein Gradientenverfahren zur Bestimmung des Minimums der Zielfunktion. Als Gütemaß für die Berechnungen und als Hauptbestimmungsgröße der Abbruchkriterien wird der Funktionswert der Zielfunktion, der sogenannte *Stresswert*, genommen. Nun hat leider die Erfahrung mit diesen iterativen Programmen gezeigt, daß die errechneten 'Lösungen' selbst bei niedrigstem Stresswert nicht sehr viel mit einer optimalen Darstellung des vorgegebenen Entfaltungsproblems zu tun haben muß. Zur Erläuterung dieses Sachverhalts dient eine kleine Vergleichsstudie für die Entfaltungsprogramme ALSCAL und MDSCAL im zweiten Teil des zweiten Kapitels (Abschnitte 2.3, 2.4 und 2.5).

Diese Schwächen der iterativen Programme, die eine Lösung des gestellten Problems durch Minimieren zu approximieren versuchen, haben uns zu der Oberlegung geführt, daß es zu dem in hohem Maße geometrischen Entfaltungsproblem auch eine direkte konstruktive Lösung geben sollte. Wir beschränken dabei unsere folgenden Untersuchungen auf den zweidimensionalen Fall, da,wie oben erwähnt,die Intention bei der Anwendung der Methode Entfaltung eine visuelle Analyse des vorgegebenen Datensatzes ist.

Eine Beschreibung des geometrischen Hintergrundes der Entfaltung geben wir in den Abschnitten 2.1 und 2.2 des zweiten Kapitels. Wir erhalten hier, daß es zu jeder Konfiguration von n Objektpunkten in eindeutiger Weise ein System $\mathcal{R}$ von konvexen Gebieten gibt, in denen jeweils die Rangfolge der Abstände zu allen Objektpunkten gleich ist. Desweiteren können wir für jedes n eine wohldefinierte Formel herleiten, die die Maximalzahl der konvexen Gebiete angibt, die durch eine Konfiguration von n Objektpunkten generiert werden.

Diese Ergebnisse führen in natürlicher Weise zu einer Fallunterscheidung in der vorgegebenen Problemstellung: Für die Konstruktion einer Lösung des Entfaltungsproblems unterscheiden wir, ob die vorgegebene Menge von Rangordnungen ein *vollständiges* System bzgl einer Konfiguration von n Objektpunkten ist, oder ob die vorgegebene Menge *unvollständig* ist, d.h. nicht die Maximalzahl von möglichen Rangordnungen bzgl n Punkten enthält.

In Kapitel 3 gehen wir davon aus, daß ein vollständiges Rangfolgensystem $\mathcal{R}$ vorgegeben ist, das im R^2 darstellbar ist, zu dem also eine zweidimensionale Konfiguration von n Punkten existiert. (Das Problem, unter welchen Bedingungen ein Rangfolgensystem darstellbar ist, wird in Kapitel 4 geklärt.) Aus dem vorgegebenen vollständigen System $\mathcal{R}$ leiten wir Kriterien her, die den qualitati-

ven und quantitativen Aufbau einer zugehörigen Konfiguration von n Objektpunkten beschreiben. Die quantitativen Kriterien wurden 1972 von J.A. Davidson entwickelt. Mit diesen Kriterien sind wir in der Lage, einen Algorithmus anzugeben, der aus einem vorgegebenen vollständigen Rangfolgensystem eine Konfiguration von n Objektpunkten sukzessive konstruiert.

Kapitel 4 behandelt den vor allem für die Praxis relevanten Fall, daß eine unvollständige Menge von Rangfolgen vorgegeben ist. Um in diesem Fall zu einer Lösung zu gelangen, müssen wir die unvollständige Menge in geeigneter Weise komplettieren. Diese Vervollständigung geschieht durch Schnitte gewisser affiner Ebenen mit dem Rangfolgensystem einer Objektkonfiguration im R^{n-1}. Wir müssen diesen komplizierten Weg zur Komplettierung gehen, da ein zweidimensionales Rangfolgensystem keine algebraische Struktur trägt, mit der es aus sich heraus über ein Erzeugendensystem vervollständigt werden kann. Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an affine Ebenen zur darstellbaren Komplettierung unvollständiger Rangfolgensysteme. Dieses Kriterium ist konstruktiv und liefert gleichzeitig die zum komplettierten System gehörende zweidimensionale Konfiguration. Damit ist auch im Fall eines unvollständig vorgegebenen Rangfolgensystems eine Lösung theoretisch konstruiert.

Ein großer Vorteil dieser konstruierten Lösung besteht darin, daß die bei größeren Problemstellungen recht umständliche und langwierige quantitative Lagebestimmung der Objektpunkte nach den Kriterien von Davidson vermieden werden kann!

Kapitel 1 Entfaltung: Historische und inhaltliche Entwicklung einer multivariaten Analysemethode

1.1 Die eindimensionale Entfaltung

Clyde H. Coombs, [3], entwickelte 1950 eine geometrische Methode, zwei unterschiedliche Regime in einem eindimensionalen Kontinuum gemeinsam darzustellen. Sein Ansatz beruhte auf der Überlegung, daß es in der Psychologie (wie auch in anderen Disziplinen) oft schwer ist, eine feste Maßeinheit mit festem, wohldefinierten Ursprung zu interpretieren. Ihm ging es darum, eine Darstellungsweise für eine Menge von Objekten oder Stimuli und eine Menge von Subjekten oder Individuen zu finden, bei der nur die ordinale Information der Bewertungen der Objekte durch die Subjekte eine Rolle spielt. Das eindimensionale Kontinuum, in dem Objekte und Subjekte dargestellt sind, nannte er joint-continuum oder J-Skala. Das Problem stellt sich also wie folgt dar:
Gegeben eine Menge von Objekten $A_1,\ldots,A_n$ und eine Menge von Subjekten $S_1,..,S_m$, und Bewertungen jedes Subjekts bzgl aller n Objekte in einer Rangordnung, d.h. von jedem Subjekt S_i eine Anordnung der $A_1,\ldots,A_n$ in der Form $A_{i_1}\ldots.A_{i_n}$. Dabei ist A_{i_1} das Objekt, das von S_i die höchste Bewertung hat, A_{i_n} das Objekt mit der niedrigsten Bewertung, $n \geq 2$, $m \geq 1$.
Gesucht ist eine Skala mit festen Objektpunkten und Subjektpunkten, so daß der euklidische Abstand zwischen je einem Subjektpunkt und allen Objektpunkten die vorgegebene Rangordnung wiedergibt.

Ist zum Beispiel S_1 ein Subjekt, das die vier Objekte A, B, C, D in der Reihenfolge ABCD bewertet, und S_2 ein weiteres Subjekt mit der Bewertung CDBA, so

sieht die gemeinsame geometrische Darstellung oder J-Skala wie folgt aus:

Die Darstellung der Rangordnung der n Objekte bzgl eines einzelnen Subjektes S_i nennt Coombs die individual-scale oder I-Skala.

Es ergeben sich nun eine Reihe von Fragen:

i) wieviele I-Skalen gibt es bzgl einer festen J-Skala, d.h. wieviele Rangordnungen lassen sich auf der J-Skala darstellen?

ii) Ist die Lage der Subjekte in diesen Skalen eindeutig vorgeschrieben, oder gibt es ganze Intervalle des Kontinuums, die alle dieselbe Rangfolge beschreiben?

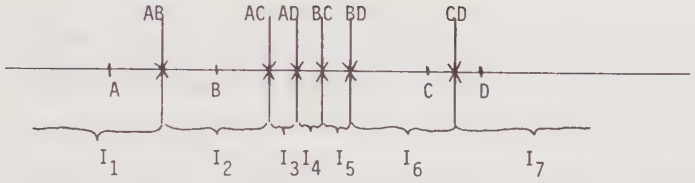
iii) Ist die Darstellung bzgl einer festen J-Skala eindeutig?

Coombs klärt diese Fragen am Beispiel von 4 Objekten A, B, C, D.

Die mögliche Anzahl verschiedener Rangordnungen dieser 4 Objekte ist 24 - die Anzahl der Permutationen von 4 Dingen. Betrachten wir die feste J-Skala

und lassen einen Subjektpunkt S von links nach rechts durch die Skala wandern. Zu Beginn hat S die Rangordnung ABCD. Diese ändert sich in dem Moment, wo S den Mittelpunkt zwischen A und B überschreitet, in die Rangordnung BACD um. Die nächste Änderung tritt am nächsten Mittelpunkt von zwei Objektpunkten ein, in diesem Fall beim Mittelpunkt AC, usw. Insgesamt erhalten wir für diese J-Skala die folgenden möglichen I-Skalen: I_1: ABCD ; I_2: BACD ; I_3: BCAD ; I_4: BCDA ;

I_5: CBDA ; I_6: CDBA ; I_7: DCBA und ihre Darstellung als Intervalle in der fest vorgegebenen J-Skala:



Jede Rangordnung ist in die nächste durch Vertauschung zweier benachbarter Symbole überführbar. Es gibt in dieser Menge genau zwei I-Skalen, die zueinander invers sind: ABCD und DCBA. Jeder Punkt zwischen zwei Mittelpunkten repräsentiert die gleiche Rangfolge oder I-Skala der Objektpunkte. Die im Beispiel gewonnenen Erkenntnisse können wir verallgemeinern:
Es sei eine Menge von Objekten $A_1,\ldots,A_n$ gegeben und ihre Darstellung in einer festen J-Skala.

Lemma 1.1.1 Zwei Punkte des eindimensionalen Kontinuums haben die gleiche Rangfolge von Abständen zu den Objektpunkten $A_1,\ldots,A_n$ genau dann, wenn sie im gleichen von den Mittelpunkten der A_i berandeten Intervall liegen.

Die zweite Aussage, die wir verallgemeinern können, ist die über die Anzahl der darstellbaren Rangfolgen oder I-Skalen in einer gegebenen J-Skala:

Satz 1.1.2 Zu jeder J-Skala mit n Objektpunkten gehört ein System von $\binom{n}{2} + 1$ verschiedenen darstellbaren Rangfolgen (I-Skalen).

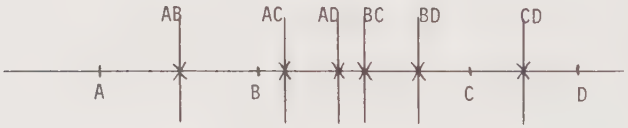
Beweis: Eine J-Skala mit n Objektpunkten enthält $\binom{n}{2}$ Mittelpunkte von je zwei Objekten. Diese $\binom{n}{2}$ Mittelpunkte beranden $\binom{n}{2}$ + 1 Intervalle, in denen jeder Punkt jeweils die gleiche Rangfolge definiert. q.e.d.

Man kann also im Fall der eindimensionalen Entfaltung bzgl n Objekten maximal $\binom{n}{2}$ + 1 verschiedene Rangfolgen auf einer J-Skala geometrisch darstellen.

Es bleibt noch die Frage zu klären, ob eine vorgegebene J-Skala in eindeutiger Weise ein System von $\binom{n}{2}$ + 1 Rangfolgen generiert. Coombs untersucht dies wieder am Beispiel von n=4 Objekten:

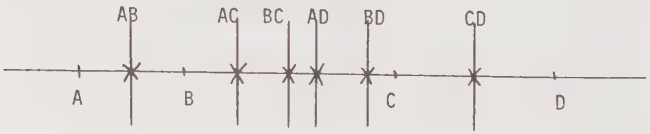
Gegeben sei eine J-Skala mit der qualitativen Anordnung ABCD.

Die Anordnung der Objekte in der Form



ergibt das System von Rangfolgen: I_1: ABCD ; I_2: BACD ; I_3: BCAD ; I_4: BCDA ; I_5: CBDA ; I_6: CDBA ; I_7: DCBA

Eine quantitativ verschiedene Anordnung



generiert das System : I_1: ABCD ; I_2: BACD ; I_3: BCAD ; I_4: CBAD ; I_5: CBDA ; I_6: CDBA ; I_7: DCBA .
Die beiden Rangfolgensysteme unterscheiden sich in der Rangfolge I_4.

Dieselbe qualitative Konfiguration der Objektpunkte ergibt also durch unterschiedliche quantitative Anordnung im eindimensionalen Kontinuum verschiedene Systeme von Rangfolgen. Der Unterschied im Beispiel liegt daran, daß im ersten Fall das Intervall zwischen den Objektpunkten A und B größer ist als das zwischen C und D, im zweiten Fall umgekehrt. Dadurch entsteht im Fall 1 eine andere Anordnung der Mittelpunkte AD und BC als im Fall 2, und somit werden verschiedene Systeme generiert. Im Fall n = 5 Objekte erhalten wir bzgl einer festen qualitativen Anordnung der Objektpunkte auf einer J-Skala 12 verschiedene mögliche Systeme von Rangfolgen, je nach Variation der inneren Mittelpunkte. Allgemein können wir also folgern:

> Eine gegebene qualitative J-Skala erzeugt kein eindeutig bestimmtes System von Rangfolgen oder I-Skalen. Das resultierende System hängt ab von der quantitativen Umsetzung der qualitativen Anordnung der Objekte im eindimensionalen Kontinuum.

Es gibt also im eindimensionalen Fall keine Standardkonfiguration der n Objektpunkte, die unabhängig von der quantitativen Darstellung ist.

Wir wollen nun noch herleiten, wieviele qualitativ verschiedene J-Skalen (Konfigurationen der Objektpunkte) es bzgl n Objekten gibt.
Für n Objekte gibt es n! mögliche Permutationen, d.h. zunächst gibt es n! qualitativ verschiedene J-Skalen. Bei einer linearen Anordnung, wie bei den J-Skalen, sind je zwei der n! möglichen Skalen zueinander invers, generieren also dieselben Systeme von Rangfolgen. Tatsächlich erhält man also nur $\frac{n!}{2}$ qualitativ verschiedener J-Skalen. Das liegt daran, daß man die Symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ von

Permutationen von n Objekten zerlegen kann in das Produkt $\gamma_n = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_n$, wo $\mathbb{A}_n$ die Gruppe der alternierenden Permutationen ist. $\mathbb{Z}_2$ bezeichnet die zweielementige Gruppe, die jedes Element aus $\mathbb{A}_n$ invertiert (spiegelt). Diese Gruppenstruktur kommt in der eindimensionalen geometrischen Darstellung zum Ausdruck. Wir haben damit:

Satz 1.1.3 Im eindimensionalen Fall gibt es bzgl n Objekten genau $\frac{n!}{2}$ qualitativ verschiedene Konfigurationen der Objektpunkte (J-Skalen).

1.2 Multidimensionale Verallgemeinerung

Im eindimensionalen Fall haben wir gesehen, daß eine Konfiguration von n Objektpunkten $\binom{n}{2} + 1$ verschiedene Rangfolgen generiert. In dieser eindimensionalen Konfiguration gibt es ganze Intervalle, deren Punkte alle dieselben Rangfolgen von Abständen zu den Objekten repräsentieren. Berandet werden diese Intervalle oder Rangfolgengebiete von den Mittelpunkten zwischen je zwei Objektpunkten.

Josef F. Bennett und William L. Hays, [1], haben dieses Modell 1960 auf k Dimensionen verallgemeinert und sind der Frage nachgegangen, wieviele Rangfolgen in einer Konfiguration von n Objektpunkten $A_1,\ldots,A_n$ in einem k-dimensionalen Raum darstellbar sind.

Es seien also $A_1,\ldots,A_n$, $A_i = (a_{i1},\ldots,a_{ik})$ Punkte in einem R^k. Im zweidimensionalen Fall ist der Ort aller Punkte, die zu je zwei Punkten A und B den gleichen Abstand haben, die Mittelsenkrechte zu der Verbindungsstrecke von A und B, im dreidimensionalen Fall ist es die Ebene senkrecht auf dieser Strecke, im

k-dimensionalen Fall eine (k-1)-dimensionale Hyperebene. Den $\binom{n}{2}$ Mittelpunkten im eindimensionalen Fall, die die Rangfolgenintervalle beranden, entsprechen also im zweidimensionalen Fall die $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrechten, im k-dimensionalen Fall die $\binom{n}{2}$ Hyperebenen.

Figur 1.2.1 zeigt eine Konfiguration von 4 Objektpunkten A,B,C,D mit den zugehörigen Mittelsenkrechten und der Aufteilung des R^2 in Rangfolgengebiete

Figur 1.2.1

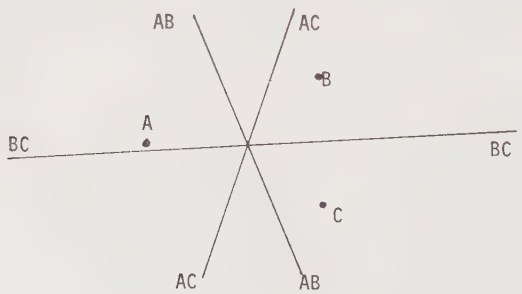
Im allgemeinen Fall von k Dimensionen ist also ein Rangfolgengebiet $A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ definiert durch $A_{i_1} \ldots A_{i_n} = \left\{ x \in R^k \mid d(A_{i_1},x) \gtrdot \ldots \gtrdot d(A_{i_n},x) \right\}$, wo $d(A_i,x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (a_{ij} - x_j)^2}$ den euklidischen Abstand bezeichnet.
Analog zum Lemma 1.1.1 erhalten wir:

Lemma 1.2.1 Zwei Punkte im R^k haben die gleiche Rangfolge von Abständen zu den Objektpunkten $A_1,\ldots,A_n$ genau dann, wenn sie im gleichen von den durch die A_i definierten Hyperebenen berandeten Gebiet liegen.

Einen Beweis für den zweidimensionalen Fall geben wir im folgenden Kapitel; dieser Beweis kann leicht auf k Dimensionen verallgemeinert werden.

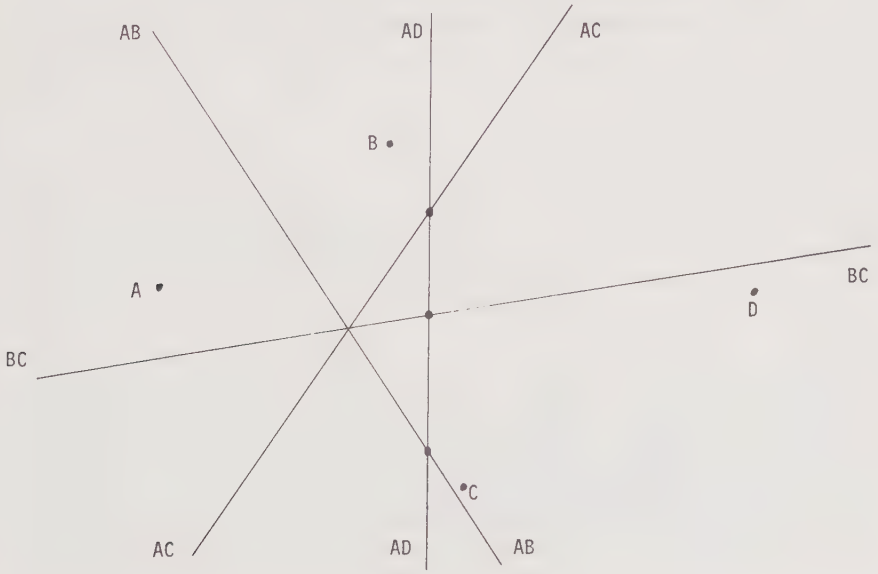
Bennett und Hays entwickeln nun eine rekursive Formel zur Berechnung der Anzahl der Subjekt- oder Rangfolgengebiete bzgl n Objekten, in Abhängigkeit der Raumdimension k. Voraussetzung an die Konfiguration der Objektpunkte ist, daß die Punkte in allgemeiner Lage sind. Was dies exakt bedeutet, wird für den Fall k = 2 im nächsten Kapitel definiert. Liegen die Punkte nicht in allgemeiner Lage, so verringert sich die Zahl der möglichen generierten Rangfolgengebiete.

Betrachten wir zunächst das Beispiel n = 3, k = 2:



Es gibt $\binom{3}{2} = 3$ Mittelsenkrechten, die den R^2 in 6 Gebiete unterteilen. Nimmt man nun einen weiteren Objektpunkt D hinzu, so entstehen genau so viele neue Mittelsenkrechten, wie vorher Punkte da waren, nämlich die Mittelsenkrechten AD, BD und CD. Jede dieser neuen Mittelsenkrechten schneidet alle alten im Endlichen, da nach Voraussetzung die Punkte in allgemeiner Lage sind.

Entlang einer neuen Mittelsenkrechten, zum Beispiel AD, beranden die ursprünglichen drei Mittelsenkrechten 4 Gebiete. Diese werden von AD in je zwei unterteilt. Es entstehen also 4 neue Gebiete für jede neue Mittelsenkrechte. Wir sehen hier: die Anzahl der Gebiete, die durch eine neue Mittelsenkrechte zusätzlich entstehen, ist die gleiche wie die Anzahl der Intervalle, die durch die Schnittpunkte der alten Mittelsenkrechten auf den neuen entstehen. Man kann also die neue Mittelsenkrechte mit dieser Intervalleinteilung interpretieren als ein eindimensionales Kontinuum mit Darstellung von drei Objektpunkten und den dadurch induzierten Rangfolgenintervallen.



Hat man also n-1 Objektpunkte gegeben und nimmt einen weiteren Punkt hinzu, so entstehen zusätzlich $(n-1)\cdot\left(\binom{n}{2} + 1\right)$ neue Gebiete. Bezeichnet C(n,2) die Anzahl der Rangfolgengebiete bzgl n Objekten in zwei Dimensionen, so ist

$$C(n,2) = C(n-1,2) + (n-1)\cdot C(n-1,1)$$

Im dreidimensionalen Fall ist die Situation ganz analog:
Zu gegebenen n-1 Punkten im R^3 gibt es die Gebietsaufteilung durch $\binom{n-1}{2}$ Hyperebenen, die senkrecht auf den Verbindungsstrecken von je zwei Punkten stehen. Nimmt man einen weiteren Punkt A_n hinzu, so erhält man n-1 neue Hyperebenen der Form A_iA_n, $i = 1,..,n-1$. Jede der neuen Hyperebenen schneidet alle alten. Genau wie im zweidimensionalen Fall teilt jede der neuen Hyperebenen die Gebiete, die zwischen ihren Schnitten mit den alten Hyperebenen liegen, in je zwei Gebiete. Dabei ist wieder die Anzahl dieser neu entstandenen Gebiete dieselbe wie die Anzahl der zweidimensionalen Gebiete, die durch die Schnitte der alten Hyperebenen auf der neuen Hyperebene entstehen. Die neue Hyperebene wird durch die Schnittgeraden in Gebiete unterteilt genau wie der R^2 durch die Mittelsenkrechten von n-1 Punkten.
Im allgemeinen Fall haben wir also:

Satz 1.2.2 Bezeichnet C(n,k) die maximale Anzahl von Rangfolgengebieten bzgl einer Konfiguration von n Punkten im R^k in allgemeiner Lage, so gilt:

$$C(n,k) = C(n-1,k) + (n-1)\cdot C(n-1,k-1)$$

Für k Dimensionen gibt es bisher keine nicht-rekursive Formel zur Berechnung der Anzahl der Rangfolgengebiete. Für k = 2 ist es uns gelungen, eine solche zu finden, die wir im zweiten Kapitel herleiten werden. Bennett und Hays haben mit Hilfe der obigen Formel die folgende Tabelle erstellt:

Tabelle 1.2.3 Maximale Anzahl C(n,k) von Rangordnungen, erzeugt von n Objekten in k Dimensionen

	k				
n	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	4	6	6	6	6
4	7	18	24	24	24
5	11	46	96	12o	12o
6	16	1o1	326	6oo	72o
7	22	197	932	$2.556 \times 1o^3$	$4.32o \times 1o^3$
8	29	351	$2.311 \times 1o^3$	$9.o8o \times 1o^3$	$2.221 \times 1o^4$
9	37	583	$5.119 \times 1o^3$	$2.757 \times 1o^4$	$9.485 \times 1o^4$
1o	46	916	$1.o37 \times 1o^4$	$7.364 \times 1o^4$	$3.43o \times 1o^5$
11	56	$1.376 \times 1o^3$	$1.953 \times 1o^4$	$1.773 \times 1o^5$	$1.o79 \times 1o^6$
12	67	$1.992 \times 1o^3$	$3.466 \times 1o^4$	$3.921 \times 1o^5$	$3.o3o \times 1o^6$
13	79	$2.796 \times 1o^3$	$5.857 \times 1o^4$	$8.o8o \times 1o^5$	$7.735 \times 1o^6$
14	92	$3.823 \times 1o^3$	$9.491 \times 1o^4$	$1.569 \times 1o^6$	$1.824 \times 1o^7$
15	1o6	$5.111 \times 1o^3$	$1.484 \times 1o^5$	$2.898 \times 1o^6$	$4.o21 \times 1o^7$

Es fällt auf, daß für k = n-1 die maximale Zahl der darstellbaren Gebiete gerade n! ist, d.h. in einem (n-1)-dimensionalen Raum können alle n! möglichen Rangfolgen dargestellt werden.

Hat man eine gewisse Menge von Rangfolgen vorgegeben, so kann man der Tabelle entnehmen, wieviel Dimensionen man mindestens braucht, um diese vorgegebenen Rangfolgen darzustellen. Dies gibt jedoch noch kein hinreichendes Kriterium für die Anzahl der Dimensionen, da es sehr wohl sein kann, daß die Anzahl m der vor-

gegebenen Rangfolgen zwar kleiner als C(n,k) ist, es jedoch in diesem System von m Rangfolgen gewisse Rangfolgen gibt, die nie zusammen in k Dimensionen darstellbar sind. Bennett und Hays stellen in ihrer Arbeit noch mehrere Methoden vor, wie man abhängig von einem gegebenen System von Rangfolgen die Anzahl der Dimensionen schätzen kann, so daß das System darstellbar ist.

Wir haben gesehen: die Entfaltung ist eine Methode, die versucht, Gesetzmäßigkeiten, die durch eine Menge von Subjekten einer Menge von Objekten zugeordnet werden, geometrisch sichtbar zu machen. Da das menschliche Auge eigentlich nur eine zweidimensionale Darstellung optimal erfassen und bewerten kann, haben wir es uns in dieser Arbeit zur Aufgabe gemacht, die zweidimensionale nicht-metrische Entfaltung theoretisch auszuleuchten, ihre zugrundeliegenden mathematischen Strukturen aufzudecken und die Problemstellung konstruktiv zu lösen. Dazu wurden wir auch durch die Tatsache angeleitet, daß bestehende Entfaltungsprogramme nur wenig befriedigende Lösungen produzieren, wie im zweiten Teil von Kapitel 2 noch dargelegt wird. Bevor wir jedoch zur zweidimensionalen Entfaltung übergehen, wollen wir noch die Methode Entfaltung in einen allgemeineren algebraischen Zusammenhang stellen, den der Multi-Dimensionalen Skalierung (MDS), und die Hierarchie der verschiedenen Entfaltungsmodelle kurz beschreiben.

1.3 Zusammenhang zwischen Entfaltung und Multidimensionaler Skalierung

Wir haben in den bisherigen Abschnitten eine geometrische Beschreibung der Methode Entfaltung in k Dimensionen dargelegt. In diesem Abschnitt wollen wir die Entfaltung in einen allgemeineren algebraischen Kontext stellen.

Exkurs: Nicht-metrische Multidimensionale Skalierung (MDS)

Eine ausführliche Beschreibung der MDS geben Hartmann, [5] , oder Tosstorff,[9] ; wir wollen hier nur kurz das Modell in Erinnerung rufen:

Gegeben ist eine Menge von Objekten $O_1,\ldots,O_n$ und eine (empirische) quadratische Proximitätsmatrix $\Delta = (\delta_{ij})$, $i,j = 1,..,n$, wo δ_{ij} ein Proximitätsmaß zwischen den Objekten O_i und O_j bezeichnet. Die Matrix Δ ist symmetrisch und soll in der Diagonalen nur Nullen enthalten.

Die Elemente δ_{ij} genügen einer bestimmten Rangfolge:

$$\delta_{i_1 j_1} < \ldots < \delta_{i_M j_M} \quad ,$$

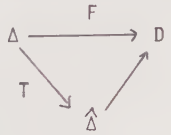
und nur diese Rangordnung und nicht die absoluten Werte sind von Bedeutung.

Gesucht ist eine Konfiguration K der n Objekte als Punkte in einem möglichst niedrigdimensionalen Raum R^k, so daß die (euklidischen Abstände $d_{ij} = d(O_i,O_j)$ derselben Rangordnung

$$d_{i_1 j_1} < \ldots < d_{i_M j_M}$$

genügen.

Sind also $\Delta = \delta(OxO) \subset R^{2n}$, $D = d(KxK) \subset R^{2n}$ die Bilder der Abbildungen δ und d, so soll D dem vorgegebenen Δ so gut wie möglich entsprechen. Nun läßt sich die ordinale Information in Δ nicht direkt umsetzen in eine metrische Information D, d.h. eine monotone Funktion $F : \Delta \longrightarrow D$ kann nicht direkt angegeben werden. Also faktorisiert man die Abbildung F durch eine Funktion T:



T ist eine monotone Transformation mit den folgenden Eigenschaften:

i) Die Werte $T(\delta_{ij}) =: \hat{\delta}_{ij}$ von T genügen immer noch einer abgeschwächten Rangbedingung:

$$\hat{\delta}_{i_1 j_1} \leqslant \ldots \leqslant \hat{\delta}_{i_M j_M} \quad \text{für} \quad \delta_{i_1 j_1} < \ldots < \delta_{i_M j_M}$$

ii) Die Werte von T sollen möglichst nahe bei den Werten von d_{ij} liegen.

Damit erhalten wir eine Beziehung zwischen der Objektmenge O und der Konfiguration K im R^k über Δ und D durch die Abbildung:

$$S(D,T(\Delta)) = \min_T \left\{ \sum_{i<j} (d_{ij} - T(\delta_{ij}))^2 \right\}$$

bezüglich einer festen Konfiguration K. Die beste Konfiguration erhält man nun noch, indem man S(D,T(Δ)) bzgl D (und damit K) minimiert:

$$S(D,T(\Delta)) = \min_K \left\{ \min_T \left\{ \sum_{i<j} (d_{ij} - T(\delta_{ij}))^2 \right\} \right\}$$

Beide Minima existieren, da beim Minimieren über T der Definitionsbereich von S ein konvexer Kegel ist und S eine quadratische Funktion, und im zweiten Fall durch die Zusatzannahme, daß alle gesuchten Konfigurationen Mittelwert Null und Varianz 1 haben sollen, der Definitionsbereich von S eine kompakte Mannigfaltigkeit ist. In der Praxis wird das erste Minimum durch den Block-Algorithmus von Kruskal, [7], gefunden, das zweite zum Beispiel durch ein Gradientenverfahren. Die Funktion S ist invariant unter Drehungen, Spiegelungen und Translationen der Konfiguration, da diese Bewegungen den Anstand nicht verändern. Damit S auch invariant bleibt bzgl Streckungen und Stauchungen von K, muß man S geeignet normieren. Kruskal schlägt dazu zwei Möglichkeiten vor:

$$\text{STRESS1} : \sqrt{\frac{\sum_{i<j} (d_{ij} - T(\delta_{ij}))^2}{\sum_{i<j} d_{ij}^2}} \qquad \text{(Kruskal 1964)}$$

$$\text{STRESS2} : \sqrt{\frac{\sum_{i<k} (d_{ij} - T(\delta_{ij}))^2}{\sum_{i<k} (d_{ij} - \bar{d}_{i\bullet})^2}} \qquad \text{(Kruskal 1965)}$$

wo $\bar{d}_{i\bullet}$ das arithmetische Mittel der d_{ij}, i fest, bezeichnet.

STRESS2 sollte vorgezogen werden, da diese Formel gewisse degenerierte Lösungen, also lokale Minima, vermeidet.

Mit der Minimierung von STRESS2 (Blockalgorithmus, Gradientenverfahren) sind wir also in der Lage, die gesuchte geometrische Umsetzung der gegebenen Objektbeziehungen algebraisch zu leisten.

Entfaltung als Spezialfall der MDS

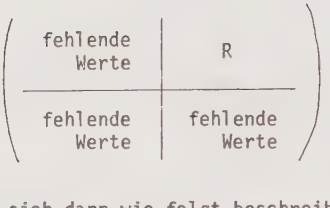
J. Douglas Carroll, [2], stellte 1972 den Zusammenhang zwischen der MDS und der Entfaltung her:

Zerlegt man im Fall der MDS die Menge O der Objekte $O_1,\ldots,O_n$ in zwei Mengen O^1 und O^2 mit n_1 bzw n_2 Elementen und $n = n_1+n_2$; $O^1 \cap O^2 = \emptyset$; $O^1 \cup O^2 = O$, so entspricht das einer Zerlegung der Matrix Δ der Form:

$$\left(\begin{array}{c|c} \Delta_{n_1 n_1} & \Delta_{n_1 n_2} \\ \hline \Delta_{n_2 n_1} & \Delta_{n_2 n_2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \} n_1 \\ \} n_2 \end{array}$$

$\underbrace{\qquad}_{n_1}$ $\underbrace{\qquad}_{n_2}$

In dieses Schema kann man nun die in der Entfaltung vorgegebene m x n Matrix R der Bewertungen von m Subjekten bzgl n Objekten einbetten als obere Rechteckmatrix:



Das Modell Entfaltung läßt sich dann wie folgt beschreiben:

Gegeben sei eine Rechteckmatrix $R = (r_{ij})$, $i = 1,..,m$; $j = 1,...,n$, deren Zeilen die Bewertungen von n Objekten enthalten. Diese ordinalen Werte genügen also den m Rangfolgen:

$$r_{ij_1} < \ldots < r_{ij_n} \quad , \; i = 1,...,m$$

Gesucht sind monotone Transformationen T_i, $i = 1,..,m$, und eine Konfiguration von Subjekt- und Objektpunkten in einem R^k, so daß die Bilder der r_{ij} unter den monotonen Transformationen T_i möglichst gut Distanzen d_{ij} zwischen Objekten j und Subjekten i entsprechen. Dabei repräsentieren die $T_i(r_{ij})$ immer noch die abgeschwächten Rangfolgen der vorgegebenen r_{ij}:

$$T_i(r_{ij_1}) \leqslant \ldots \leqslant T_i(r_{ij_n}) \quad \text{für} \quad r_{ij_1} < \ldots < r_{ij_n} \; , \; i=1,..,m$$

Mit der Rechteckmatrix R, eingebettet in eine große MDS-Matrix Δ, kann nun das vorgegebene Problem algebraisch gelöst werden durch Minimieren der oben angegebenen, etwas modifizierten Formeln:

$$\text{STRESS2}_i = \sqrt{\frac{\sum_{\text{k}} (d_{ij} - T(r_{ij}))^2}{\sum_{\text{k}} (d_{ij} - \bar{d}_i)^2}} \qquad \text{für jedes Subjekt i}$$

Wieder spielt hier die Normierung eine wichtige Rolle: Carroll weist darauf hin, daß bei Verwendung von STRESS1_i eine perfekte Lösung (im Sinne der Minimierung der Formel) möglich ist, wo beide Mengen, Subjekte und Objekte, jeweils auf einen Punkt zusammengezogen sind:

Subjekte • • Objekte

In diesem Fall ist d_{ij} = konstant $\neq$ o für alle i,j, also ist es möglich, daß der Zähler verschwindet und der Nenner $\neq$ o bleibt. Bei Anwendung der STRESS2-formel kann dies nicht passieren, da unter den obigen Annahmen auch der Nenner der Formel verschwindet, STRESS2 also undefiniert wird.

Bemerkung 1.3.1 Wir haben stillschweigend die MDS-Regression für jedes Subjekt einzeln formuliert (STRESS1,2 abhängig von i, Transformation T abhängig von i). Wählen wir die Formel

$$\text{STRESS2} = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (d_{ij} - T(r_{ij}))^2}{\sum_i \sum_j (d_{ij} - \bar{d}_i)^2}}$$

(analog für STRESS1), so daß für alle i eine gemeinsame Transformation T gesucht wird und über die gesamte Matrix gleichzeitig regressiert wird, so kann man schnell (wie Carroll zeigt) degenerierte Lösungen angeben:
Es sei r_{ij} der kleinste (größte) Wert in R, d.h. der Abstand d_{ij} zwischen Subjekt i und Objekt j soll am größten sein. Eine perfekte lösung kann schon im eindimensionalen Fall angegeben werden:

Hier ist der Abstand zwischen m-1 Subjekten und allen Objekten gleich, und nur das i-te Subjekt hat zum j-ten Objekt den geforderten größten Abstand. Beide Stressformeln 1 und 2 liefern hier den Wert o.

Ein zweiter Grund, der gegen die Verwendung *einer* Regression für alle m Zeilen spricht, ist, daß die Daten selbst ein solches Vorgehen nicht zulassen, da die

m Subjekte verschiedene Bewertungsmaße verwenden.
Wir sehen also, die einzige Möglichkeit, eine nicht-metrische algebraische Analyse eines Entfaltungsproblems mittels einer oberen Rechteckmatrix durchzuführen ist, diese Matrix zeilenweise zu regressieren (row-conditional) und die Formel STRESS2 zu verwenden. Eine genaue technische Analyse und Beschreibung dieser algebraischen Entfaltungsmethode möge der interessierte Leser bei Hartmann, [5] , S 139 ff, nachlesen.

1.4 Die Hierarchie der verschiedenen Entfaltungsmodelle

Im Laufe der Zeit wurden eine Reihe von Entfaltungsmodellen entwickelt. Carroll zeigte algebraisch, daß die folgenden Modelle jeweils ein Spezialfall des nächsten sind, also eine Hierarchie bilden:

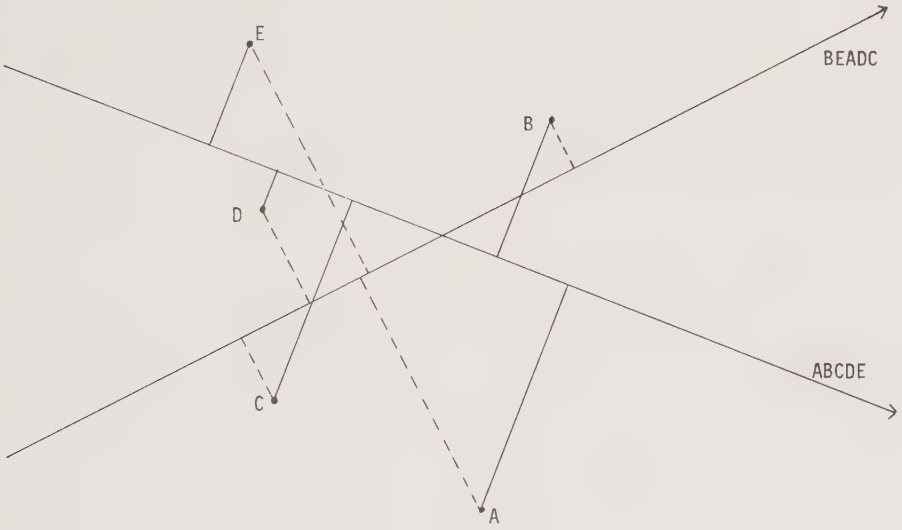
1) Vektormodell
2) Einfaches Entfaltungsmodell
3) Gewichtetes Entfaltungsmodell
4) Allgemeines Entfaltungsmodell

Zu 1) Vektormodell

Das Vektormodell besteht aus einer Menge von Objektpunkten, die in einem mehrdimensionalen Raum angeordnet sind, und einer Menge von Subjekten, die als Vektoren oder gerichtete Strecken in diesem Raum liegen. Die Präferenzordnung der Objekte für ein bestimmtes Subjekt wird dargestellt durch die orthogonalen Projektionen der Objektpunkte auf den Subjektvektor. In Figur 1.4.1 ist ein Vektormodell für den zweidimensionalen Fall von 5 Punkten A,B,C,D,E und den zwei Präferenzordnungen ABCDE und BEADC gezeichnet. Das Beispiel ist der Arbeit von

Carroll, [2], entnommen, in der auch die algebraische Realisation dieses Modells beschrieben wird.

Figur 1.4.1



Zu 2) Einfaches Entfaltungsmodell

Dies ist das Modell von Coombs (für den eindimensionalen Fall) bzw Bennett und Hays (für den mehrdimensionalen Fall), das in den Abschnitten 1.1 und 1.2 beschrieben wurde.

Zu 3) Gewichtetes Entfaltungsmodell

Im einfachen Entfaltungsmodell wird der euklidische Abstand benutzt. Die Orte aller Punkte (die 'Isopräferenzflächen'), die der Präferenzordnung eines Subjekts genügen, sind dann im zweidimensionalen Fall konzentrische Kreise mit dem Subjektpunkt als Mittelpunkt, im k-dimensionalen Fall konzentrische (k-1)-Sphären. Ein solches Modell setzt voraus, daß

i) jede Dimension von allen Subjekten gleich bewertet wird, und

ii) alle Subjekte die gleiche Menge von Beobachtungsdimensionen verlangen.

Nimmt man nun statt der euklidischen die folgende Distanzdefinition:

$$d_{ij} = (\sum_k w_{ik}(a_{ik} - s_{jk})^2)^{1/2} \quad , i=1,..,n, \quad j=1,..,m$$

wo $w_{ik} \in R$, $w_{ik} \geq 0$, a_{ik} die k-te Koordinate des i-ten Objektpunktes, s_{jk} die k-te Koordinate des j-ten Subjektpunktes ist, so umgeht man die oben erwähnten Probleme i) und ii). Die Isopräferenzflächen sind nun achsenparallele Hyperellipsoide um die Subjektpunkte S_j.

4) Das allgemeine Entfaltungsmodell

Eine zweite Erweiterung des einfachen Entfaltungsmodells gab Carroll, [2] ,: Es werden nicht nur unterschiedliche Gewichtungen der Achsen von den Subjekten erlaubt, sondern zusätzlich für jedes Subjekt noch orthogonale Rotationen der Urteilsdimensionen im allgemeinen Wahrnehmungsraum R^k. Diese Rotationen spielen im einfachen Entfaltungsmodell keine Rolle, da die Distanzen invariant unter Drehungen sind. Im gewichteten Modell jedoch werden die achsenparallelen Hyperellipsoiden zu nicht-achsenparallelen Hyperellipsoiden.

Die hierarchische Struktur

Daß das einfache Entfaltungsmodell ein Spezialfall des gewichteten, und das gewichtete ein Spezialfall des allgemeinen Modells ist, ist leicht zu sehen. Es bleibt die Veranschaulichung des Vektormodells als Spezialfall des einfachen Entfaltungsmodells.

Es sei ein einfaches Entfaltungsmodell für n Objekte und m Subjekte gegeben. Verschiebt man einen Subjektpunkt entlang einer festen Geraden, die durch den Ursprung geht, während man die Objekte unverändert läßt, so gehen die konzentrischen Kreise als Isopräferenzflächen dieses Subjektpunktes asymptotisch über

in zur Ursprungsgeraden parallele Geraden. Dies sind gerade die Isopräferenzflächen beim Vektormodell. Macht man diesen Prozeß also für alle m Subjektpunkte, so erhält man aus dem einfachen Entfaltungsmodell in zwei Dimensionen das zweidimensionale Vektormodell.

Kapitel 2 Zweidimensionale Entfaltung: Erste Untersuchungen und eine Anwendung

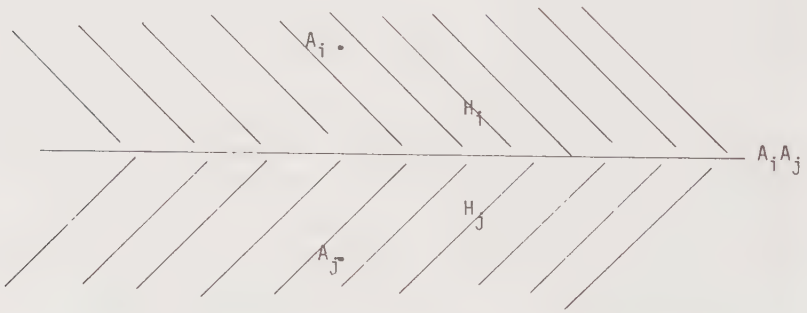
2.1 Zerlegung des R^2 in Rangfolgengebiete

Es sei K eine Konfiguration von n Objektpunkten $A_1,\ldots,A_n$ im R^2. Der Ort aller Punkte, die zu je zwei der Punkte A_i, A_j den gleichen Abstand haben, ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke von A_i und A_j, die wir im folgenden mit A_iA_j bezeichnen wollen:

$$A_iA_j = \left\{ x \in R^2 \;\middle|\; d(x,A_i) = d(x,A_j) \right\}$$

Diese Mittelsenkrechte unterteilt den R^2 in zwei konvexe Halbräume H_i und H_j, die dadurch definiert sind, daß in ihnen jeder Punkt zu A_i und A_j die gleiche Rangfolge von Abständen zu den A_i, A_j hat:

$$H_i = \left\{ x \in R^2 \;\middle|\; d(x,A_j) > d(x,A_i) \right\}$$



Aus einer Menge von n Objekten kann man gerade $\binom{n}{2}$ verschiedene zweielementige Mengen bilden, d.h. zu den n Punkten $A_1,\ldots,A_n$ gibt es $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrechten. Die Gesamtheit aller $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrechten A_iA_j, $i \neq j$, zu den Objektpunkten

$A_1,\ldots,A_n$ unterteilt also den R^2 in eine endliche Menge von Gebieten:

Lemma 2.1.1 Zwei Punkte im R^2 haben die gleiche Folge (der Größe nach geordnet) von Abständen zu den Konfigurationspunkten $A_1,\ldots,A_n$ genau dann, wenn sie im Innern des gleichen von Mittelsenkrechten berandeten Gebietes liegen.

Beweis: "$\Longleftarrow$" Eine Mittelsenkrechte zu zwei Punkten im R^2 unterteilt den R^2 in zwei konvexe Halbräume. In jedem dieser Halbräume ist die Abstandsfolge zu den zwei vorgegebenen Punkten dieselbe. Ein Gebiet ist nach Konstruktion endlicher Durchschnitt von konvexen Halbräumen, d.h. alle Punkte im Innern dieses Gebietes haben dieselbe Rangfolge von Abständen zu den Konfigurationspunkten.

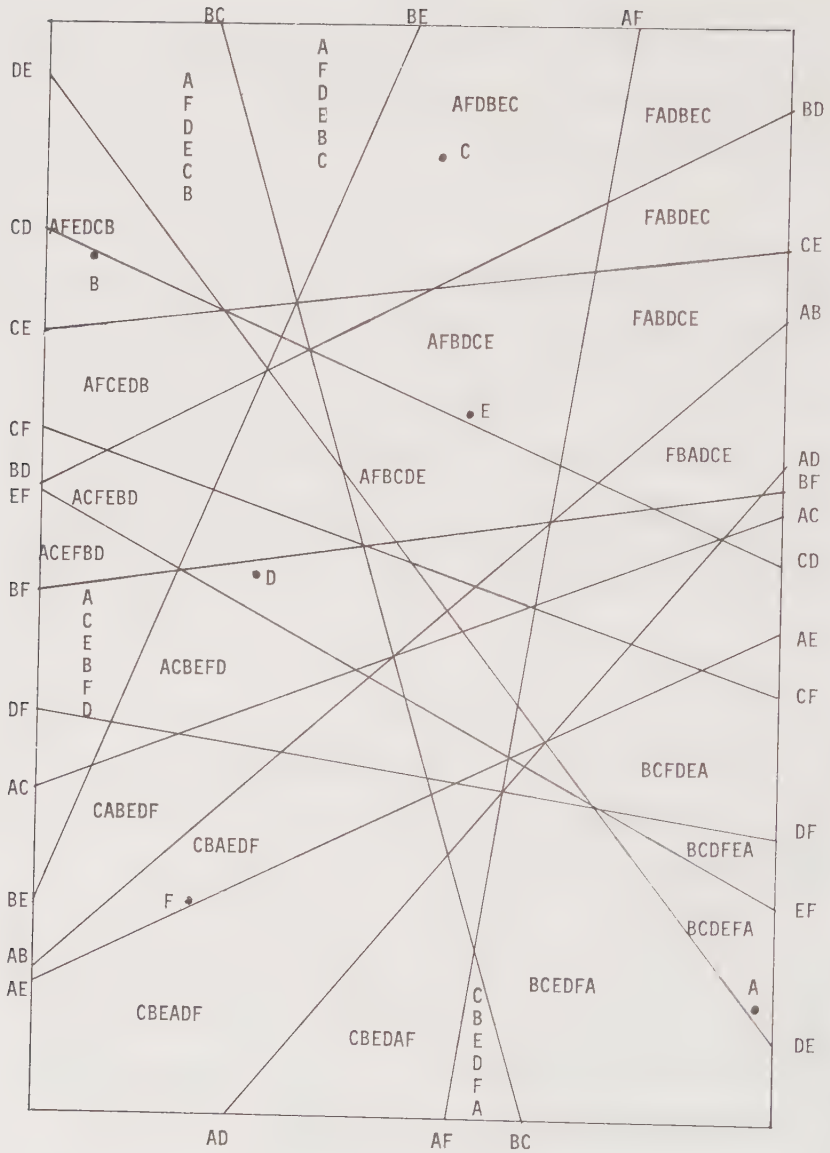
"$\Longrightarrow$" Folgt aus der Konstruktion und der Tatsache, daß der endliche Durchschnitt konvexer Räume wieder konvex, also insbesondere zusammenhängend ist.

q.e.d

Durch eine Konfiguration von n Punkten ist also in eindeutiger Weise eine Zerlegung des R^2 in Gebiete gegeben. Jeder Punkt eines solchen Gebietes, also jedes Gebiet G entspricht einer bestimmten Rangfolge von Distanzen zu den Konfigurationspunkten:

$$G = \left\{ x \in R^2 \;\middle|\; d(x,A_{i_1}) \geqslant \ldots \geqslant d(x,A_{i_n}) \right\} = A_{i_1} \ldots A_{i_n}$$

Diese Rangfolgengebiete entsprechen den im Abschnitt 1.1 konstruierten Subjekt- oder Rangfolgenintervallen (I-Skalen) auf der J-Skala im eindimensionalen Fall. Auf der folgenden Seite geben wir als Beispiel eine Konfiguration von sechs Punkten A,B,C,D,E,F mit den zugehörigen Rangfolgengebieten.


BC
BE
AF
DE
AFDECB
AFDEBC
AFDBEC
FADBEC
BD
C
CD
AFEDCB
FABDEC
B
CE
CE
AB
FABDCE
AFBDCE
AFCEDB
E
CF
FBADCE
AD
BD
AFBCDE
BF
EF
ACFEBD
AC
ACEFBD
CD
D
BF
ACEBFD
AE
ACBEFD
CF
DF
BCFDEA
AC
CABEDF
DF
BCDFEA
CBAEDF
BE
F
EF
BCDEFA
AB
AE
BCEDFA
A
CBEADF
CBEDFA
CBEDAF
DE
AD
AF
BC

Wie wir schon im Abschnitt 1.2 bemerkt haben, verringert sich die Anzahl der möglichen Gebiete bzgl einer Konfiguration von n Punkten, wenn die Mittelsenkrechten (und damit die Punkte) spezielle Lagen im R^2 einnehmen: etwa wenn gewisse Mittelsenkrechten parallel liegen, oder sich mehr als 3 Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden. Um dies zu vermeiden, werden wir für die folgenden Untersuchungen immer voraussetzen, daß die Punkte der Konfiguration K in allgemeiner Lage sind!

Definition 2.1.2 n Punkte im R^2 sind in allgemeiner Lage (i.a.L.) genau dann, wenn für die Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken von je zwei Punkten gilt:

a) Die Mittelsenkrechten schneiden sich genau in 2- und 3-fachen Schnittpunkten (d.h. in einem Schnittpunkt treffen höchstens drei Geraden aufeinander).

b) Keine Mittelsenkrechten liegen parallel oder fallen zusammen.

Konfigurationen im R^2 in allgemeiner Lage beschreiben den allgemeinen Fall, denn jede Konfiguration in spezieller Lage kann dadurch konstruiert werden, daß gewisse Punkte einer Konfiguration i.a.L. spezielle Lagen einnehmen.

Nach Konstruktion entsprechen alle Punkte im Innern eines Gebietes ein und derselben Rangfolge von Abständen zu den Konfigurationspunkten, wobei in der Rangfolge überall nur das " > " - Zeichen steht. Der Rand jedes Gebietes besteht aus Mittelsenkrechtenstücken, d.h. aus Punkten, die zu je zwei der Konfigurationspunkten den gleichen Abstand haben. Liegt also ein Subjektpunkt auf dem Rand eines Gebietes, so enthält die zugehörige Rangfolge ein oder mehrere " = "- Zeichen, sogenannte *ties* . Über die Darstellbarkeit solcher ties können wir sagen:

a) liegt der Punkt auf einem Geradenstück, so enthält die Rangfolge einen tie;

b) liegt der Punkt auf einem 2-fachen Schnittpunkt von Mittelsenkrechten, so enthält die zugehörige Rangfolge zwei ties;

c) liegt der Punkt auf einem 3-fachen Schnittpunkt von Mittelsenkrechten, so enthält die zugehörige Rangfolge drei ties.

Hieraus folgt, daß eine Rangfolge, die mehr als 3 ties enthält, höchstens in einer Konfiguration im R^2 darstellbar ist, deren Punkte nicht in allgemeiner Lage sind.

2.2 Das vollständige System der Rangfolgengebiete

Wir werden in diesem Abschnitt eine nicht-rekursive Formel für die Maximalzahl von Rangfolgengebieten bzgl einer Konfiguration von n Punkten i.a.L. im R^2 herleiten und erste Eigenschaften dieses Systems von Rangfolgengebieten benennen.

Zur Bestimmung der Maximalzahl möglicher Gebiete brauchen wir genaue Angaben über die Anzahl der 2- und 3-fachen Schnittpunkte der $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrechten einer Konfiguration. K. J.A. Davidson, [4], hat 1972 in seiner Arbeit Formeln angegeben, die diese Anzahl in Abhängigkeit der Dimension des Konfigurationsraumes algebraisch bestimmen. Für den zweidimensionalen Fall können wir die Zahl der Schnittpunkte auch geometrisch herleiten:

Lemma 2.2.1 Voraussetzung: $n \geq 4$

Die $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrechten einer Konfiguration von n Punkten $A_1,\ldots,A_n$ i.a.L. im R^2 schneiden sich in $3\binom{n}{4}$ zweifachen und $\binom{n}{3}$ dreifachen Schnittpunkten.

Beweis: Da nach Voraussetzung die Konfigurationspunkte in allgemeiner Lage sind, sind nicht irgend zwei Mittelsenkrechten parallel oder identisch, d.h. alle Mittelsenkrechten schneiden alle anderen im Endlichen. Es gibt 3-fache Schnittpunkte, da je drei der Konfigurationspunkte ein Dreieck bilden und sich die drei Mittelsenkrechten dieses Dreiecks im Mittelpunkt des Umkreises schneiden. Es gibt $\binom{n}{3}$ verschiedene Dreiecke mit verschiedenen Eckpunkten A_i,A_j,A_k , d.h. es gibt $\binom{n}{3}$ verschiedene 3-fache Schnittpunkte.
m Geraden in allgemeiner Lage schneiden sich in $\frac{1}{2}m(m-1)$ zweifachen Schnittpunkten (auf jeder der m Geraden liegen m-1 Schnittpunkte mit den übrigen Geraden; da jeder Schnittpunkt zu zwei Geraden gehört, folgt $\frac{1}{2}m(m-1)$).
Damit folgt:
Es gibt $\frac{1}{2}\binom{n}{2}(\binom{n}{2}-1) - 3\binom{n}{3} = 3\binom{n}{4}$ verschiedene 2-fache Schnittpunkte.

q.e.d.

Bemerkung 2.2.2 Über die Anzahl der verschiedenen Schnittpunkte auf jeweils einer Mittelsenkrechten können wir die folgenden Angaben machen:
Es seien A_iA_k, A_iA_l und A_kA_l drei Mittelsenkrechten zu den Punkten A_i, A_k und A_l. Diese Schneiden sich im 3-fachen Punkt E_{ikl}, der Mittelpunkt des Dreiecks (A_i,A_k,A_l) ist. Ist die Konfiguration der n Punkte $A_1,\ldots,A_n$ in allgemeiner Lage, so gilt:

i) Auf jeder der $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrechten A_iA_k liegen n-2 verschiedene 3-fache Schnittpunkte, nämlich alle E_{ikl} mit $l \neq i,k$.

Auf jeder der $\binom{n}{2}$ Geraden liegen insgesamt $\binom{n}{2} - 1$ verschiedene 2-fache Schnittpunkte, in einem 3-fachen Punkt fallen 2 Schnittpunkte mit dieser Gera-

den zusammen. Wir erhalten also:

ii) Auf jeder Mittelsenkrechten liegen $\binom{n}{2} - 1 - 2(n-2) = \frac{1}{2}n(n-5) + 3$ verschiedene 2-fache Schnittpunkte $E_{ik,lm}$ mit $i \neq k \neq l \neq m$.

Mit Hilfe von Lemma 2.2.1 können wir nun die Kardinalität eines Systems von Rangfolgengebieten bzgl einer Konfiguration von n Punkten i.a.L. im R^2 angeben:

Satz 2.2.3 Es sei $n \geq 3$. Die Mittelsenkrechten einer Konfiguration von n Punkten i.a.L. im R^2 unterteilen den R^2 in

$$s = \frac{1}{2}\binom{n}{2} \cdot \left[\binom{n}{2} + 1\right] + 1 - \binom{n}{3}$$

verschiedene Gebiete.

Beweis: Behauptung: m Geraden im R^2 in allgemeiner Lage, die sich also nur in 2-fachen Schnittpunkten schneiden, bilden $\frac{1}{2}m(m+1) + 1$ verschiedene Gebiete.

Hilfssatz: Gegeben m Geraden i.a.L. im R^2 . Dann gilt für alle m:

die (m+1)-te Gerade erzeugt m+1 neue Gebiete.

Beweis des Hilfssatzes: Induktion über m

Induktionsverankerung: eine Gerade erzeugt 2 Gebiete; der Schnitt mit einer weiteren Geraden bringt 2 neue Gebiete hinzu.

Annahme: gelte für m

Schluß auf m+1: Gegeben m Geraden i.a.L.; nach Voraussetzung schneidet die (m+1)-te Gerade alle übrigen. In jedem Schnittpunkt entstehen zwei neue Gebiete, d.h. insgesamt entstehen 2m neue Gebiete. Je zwei der m Schnittpunkte auf der (m+1)-ten Geraden haben ein neues Gebiet gemeinsam, d.h. es gibt m-1 doppelt auftretende Gebiete. Insgesamt entstehen also 2m - (m-1) = m + 1 neue Gebiete q.e.d.

Beweis der Behauptung: Da jede m-te Gerade m neue Gebiete erzeugt, hat man

für alle Geraden: $1 + \sum_{i=1}^{m} i = \frac{1}{2}m(m+1) + 1$ verschiedene Gebiete.

In einem 3-fachen Punkt fallen drei 2-fache Schnittpunkte, die ein dreieckiges Gebiet umschließen, zusammen. Dabei verschwindet genau dieses Gebiet. Es gibt $\binom{n}{3}$ verschiedene 3-fache Schnittpunkte in der Mittelsenkrechtenkonfiguration. Damit haben wir:

Die $m = \binom{n}{2}$ Mittelsenkrechten erzeugen $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\cdot\left[\binom{n}{2} + 1\right] + 1 - \binom{n}{3}$ verschiedene Gebiete.

q.e.d.

Die Zahl s ist die Maximalzahl von möglichen Gebieten, die durch eine Konfiguration von n Punkten im R^2 erzeugt werden können.

Wenn wir das Bild der Gebietsaufteilung des R^2 bzgl sechs Punkten auf Seite 32 betrachten, stellen wir fest, daß es Gebiete gibt, die vollständig von Mittelsenkrechten berandet werden, und Gebiete, die nach einer Seite offen sind. Wir können weiterhin beobachten, daß es zu jedem offenen Gebiet $A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ ein offenes Gebiet mit genau der inversen Rangfolge $A_{i_n} \ldots A_{i_1}$ gibt. Die Anzahl der offenen bzw abgeschlossenen Gebiete liefert das folgende

Korollar 2.2.4 Mit den Voraussetzungen von Satz 2.2.3 gilt:

Unter den s verschiedenen Gebieten gibt es

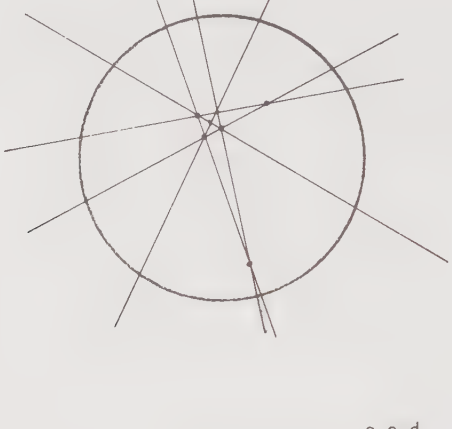
i) $s_o = 2\binom{n}{2}$ offene (im Sinne von unbeschränkt) Gebiete

und

ii) $s_a = \frac{1}{2}\left[\binom{n}{2}-1\right]\cdot\left[\binom{n}{2}-2\right] - \binom{n}{3}$ abgeschlossene (im Sinne von beschränkt) Gebiete.

Beweis: zu i): Wähle einen Kreis um die Mittelsenkrechtenkonfiguration so, daß alle Schnittpunkte der Mittelsenkrechten innerhalb dieses Kreises liegen.

Die m Mittelsenkrechten unterteilen den Kreisrand in 2m Segmente. Dies sind nach Konstruktion die vom Kreis gebildeten Randstücke der offenen Gebiete.



zu ii): $s_a = s - s_o$

q.e.d.

Auf der nächsten Seite geben wir eine Tabelle mit der Anzahl der Geraden, Schnittpunkte und Gebiete in Abhängigkeit von n, um einen Eindruck zu vermitteln, in welcher Größenordnung die Kompliziertheit der Geometrie sich mit wachsendem n entwickelt.

Es sei $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ eine Rangfolge bzw ein Gebiet zu einer vorgegebenen Konfiguration. Ist $A_{i_j} A_{i_{j+1}}$ eine Mittelsenkrechte, die das Gebiet $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ berandet, so ist nach Konstruktion das Gebiet, das durch $A_{i_j} A_{i_{j+1}}$ von $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ abgegrenzt wird, dasjenige mit der Rangfolge $A_{i_1} \dots A_{i_{j-1}} A_{i_{j+1}} A_{i_j} \dots A_{i_n}$;
d.h. die Rangordnungen bzw Gebiete, die längs einer Geraden A_iA_j aufeinander stoßen, sind gerade die, in denen die Symbole A_i und A_j vertauscht sind.

n	Geraden	3-f. Eckp.	2-f. Eckp.	abgeschlosse. Gebiete	offene Gebiete	Eckp. insges.	Gebiete insg.
3	3	1	o	o	6	1	6
4	6	4	3	6	12	7	18
5	1o	1o	15	26	2o	25	46
6	15	2o	45	71	3o	65	1o1
7	21	35	1o5	155	42	14o	197
8	28	56	18o	295	56	236	351
9	36	84	378	511	72	462	583
1o	45	12o	63o	826	9o	75o	916
2o	19o	1 14o	14 535	16 626	38o	15 675	17 oo6
3o	435	4 o6o	82 215	89 9o1	87o	86 275	9o 771
4o	78o	9 88o	274 17o	293 151	1 56o	284 o5o	294 711
5o	1 225	19 6oo	69o 9oo	728 876	2 45o	71o 5oo	731 326
6o	1 77o	34 22o	1 462 9o5	1 529 576	3 54o	1 497 125	1 533 116
7o	2 415	54 74o	2 75o 685	2 857 751	4 83o	2 8o5 425	2 862 581
8o	3 16o	82 16o	4 744 74o	4 9o5 9o1	6 32o	4 826 9oo	4 912 221
9o	4 oo5	117 48o	7 665 57o	7 896 526	8 olo	7 783 o5o	7 9o4 536
1oo	4 95o	161 7oo	11 763 675	12 o82 126	9 9oo	11 925 375	12 o92 o26

In einem 3-fachen Schnittpunkt E_{ijk} der Mittelsenkrechten schneiden sich drei Geraden, die sechs Gebiete beranden, die in diesem Schnittpunkt zusammenstossen. Damit gilt:

Satz 2.2.5 a) Zu jedem 3-fachen Schnittpunkt gehört eine Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_3$, die alle 6 Gebiete um diesen Schnittpunkt generiert: ist E_{ijk} der Schnittpunkt, so besteht $\mathfrak{S}_3$ aus den 6 Permutationen der A_i, A_j, A_k, wobei die restlichen Symbole festgehalten werden.

b) Zu jedem 2-fachen Schnittpunkt gehört eine Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$, die die 4 Gebiete um diesen Schnittpunkt generiert: ist $E_{ij,kl}$ der Schnittpunkt, so besteht $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ aus den 4 Permutationen $\ldots A_iA_jA_kA_l\ldots$, $\ldots A_iA_jA_lA_k\ldots$, $\ldots A_jA_iA_kA_l\ldots$, $\ldots A_jA_iA_lA_k\ldots$.

Dieser Satz 2.2.5 ist programmtechnisch sehr hilfreich, da dadurch der Zeitaufwand zur Berechnung der einzelnen Rangfolgengebiete einer gegebenen Konfiguration stark verringert wird.

2.3 Anwendung: Vergleich der Entfaltungsprogramme ALSCAL und MDSCAL

In den sechziger und siebziger Jahren wurden auf der Grundlage der in den Abschnitten 1.3 und 1.4 von Kapitel 1 beschriebenen Einbettung der Entfaltung in den Komplex Multidimensionale Skalierung eine ganze Reihe von iterativen Entfaltungsprogrammen entwickelt. Die gesuchte Konfiguration von n Objekt-

und m Subjektpunkten in einem niedrigdimensionalen Raum wird dabei von diesen Entfaltungsprogrammen aus einer vorgegebenen m x n - Bewertungsmatrix von m Subjekten bzgl je n Objekten im wesentlichen berechnet durch Minimieren einer Zielfunktion, der sogenannten Stressfunktion. Diese Stressfunktion ist eine normierte Funktion in den Variablen Distanzen D zwischen Objekt- und Subjektpunkten und Disparitäten D^* , den monotonen Transformationen der Zeilen der vorgegebenen Matrix. Im Verlauf jeder Iteration wird einmal D konstant gehalten, um D^* zu minimieren, und vice versa. Als Maß der Güte der von den Verfahren errechneten Lösungen steht der Wert der Zielfunktion, der Stresswert, zur Verfügung. Inwieweit dieses Gütemaß zur Beurteilung der Lösung ausreicht, und wie überhaupt die Lösungen der iterativen Verfahren einzuschätzen sind, diesen Fragen wollen wir im folgenden anhand einer kleinen Vergleichsstudie nachgehen.

Auf der Grundlage der in den Abschnitten 2.1 und 2.2 erarbeiteten Ergebnisse haben wir ein Programm geschrieben, das zu vorgegebener Objektkonfiguration die Aufteilung des R^2 in Rangfolgengebiete sichtbar macht, die Elemente des zur Konfiguration gehörenden vollständigen Rangfolgensystems auflisten und diese Liste mit gewissen anderen, vorgegebenen Rangfolgen vergleichen kann. Wie man der Tabelle auf Seite 38 entnehmen kann, wächst der Aufwand der Berechnungen mit steigendem n sehr schnell. Wir haben daher den Umfang der vom Programm bearbeitbaren Probleme auf n = 2o Objekte begrenzt.

In unserem Vergleich benutzen wir die Entfaltungsprogramme ALSCAL-4, Forrest W. Young, 2nd edition 1979, und MDSCAL 5, Kruskal 1971.
ALSCAL und MDSCAL unterscheiden sich im wesentlichen in zwei Punkten:
a) in den benutzten Stress-Formeln und
b) in der Berechnung der neuen Distanzen

zu a) Die von ALSCAL benutzte Stressformel lautet:

$$SS(D,D^*) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_{ik}^2 - d_{ik}^{*2})^2}{\sum_{i=1}^{n}(d_{ik}^{*2} - \overline{d_{\cdot k}^{*2}})^2}}$$

wo D die Matrix der Distanzen d_{ik} zwischen den Objektpunkten A_i und den Subjektpunkten S_k, $i = 1,..,n$, $k = 1,..,m$,

D^* die Matrix der Disparitäten d_{ik}^* (monotone Transformationen der Daten), und

$\overline{d}_{\cdot k}^*$ das arithmetische Mittel der Disparitäten bei festem k bezeichnet.

MDSCAL verwendet demgegenüber die Formel:

$$S(D,D^*) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_{ik}^2 - d_{ik}^{*2})^2}{\sum_{i=1}^{n}(d_{ik}^2 - \overline{d_{\cdot k}^2})^2}}$$

wo $\overline{d}_{\cdot k}$ das arithmetische Mittel der Distanzen bei festem k ist.

zu b) ALSCAL benutzt zur Berechnung der neuen Koordinaten der Objekt- und Subjektpunkte eine Alternierende-Kleinste-Quadrate-Methode, während MDSCAL die neuen Koordinaten mit Hilfe des Gradientenverfahrens (deepest descent) berechnet.

Ausführlichere Informationen über die beiden Verfahren finden sich bei Kruskal, [7], und Tanake/ F.W.Young/J.de Leeuw, [8] .

Im Vergleich gehen wir wie folgt vor:

Zunächst wird eine Konfiguration von n Punkten i.a.L. zufällig erzeugt. Mit unserem Programm bestimmen wir dann alle Rangfolgengebiete dieser Konfiguration. Aus diesem vollständigen Rangfolgensystem wählen wir m Rangfolgen beliebig aus und starten mit diesen m Rangfolgen als Input für die Programme ALSCAL und MDSCAL. Schließlich lassen wir von unserem Programm die vollständigen Rangfolgensysteme der von ALSCAL und MDSCAL gefundenen Lösungen berechnen, vergleichen diese Systeme mit der Liste der vorgegebenen Rangfolgen und lassen Plots erstellen der errechneten Konfigurationen der Objektpunkte mit den Mittelsenkrechten (also der Gebietsaufteilung) und, bei kleinem m, den von ALSCAL und MDSCAL bestimmten Subjektpunkten.

Die Ergebnisse, die die Verfahren bei Anwendung auf verschiedene Beispiele liefern, werden nach den folgenden Kriterien beurteilt:

Kriterium a): Wieviele der vorgegebenen Rangfolgen lassen sich in den von den Verfahren errechneten Konfigurationen darstellen?
(Trefferquote: Anzahl der darstellbaren Rangfolgen)

Kriterium b): Wieviele der errechneten Subjektpunkte sind exakt dargestellt, d.h. liegen in den ihnen zugehörigen Gebieten?
(Darstellungsqualität: Anzahl der exakt dargestellten Rangfolgen)

Kriterium b) kommt allerdings nur bei kleinem n zur Anwendung!

Auf den folgenden Seiten werden die Beispiele ausführlich besprochen, um dem Leser einen tieferen Einblick in das Verhalten der beiden Verfahren zu ermöglichen. In Abschnitt 2.4 werden die Ergebnisse des Vergleichs in geraffter Form noch einmal aufgelistet und bewertet. Am Ende dieses Kapitels haben wir in Abschnitt 2.5 für jeden untersuchten Fall charakteristische Plots der von den Programmen errechneten Lösungen zusammengestellt.

I) n = 6 Objektpunkte

Aus einer Konfiguration von 6 Punkten mit dem zugehörigen vollständigen System von 1o1 darstellbaren Rangfolgen (vgl Seite 32) haben wir jeweils m = 8, m = 18 und m = 4o Rangfolgen zufällig ausgewählt und als Input für die Verfahren verwendet.

a) 6 Punkte, 8 Rangfolgen

Problemgröße: 48 Distanzen sind zu berechnen

Problemcharakteristik: 8 : 1o1, d.h. ungefähr 8% des vollständigen Rangfolgensystems sind vorgegeben.

ALSCAL beginnt mit einer Konfiguration mit einem Stresswert von 3o%. In diesem Beispiel haben wir uns die Veränderungen durch fortlaufende Iteration etwas genauer angesehen:

Iterationszahl	13	23	31	5o	1oo
Stress	o.18	o.15	o.13	o.o8	o.o2
fehlende Rangfolgen	3	2	1	1	1

ALSCAL hat also nach 31 Iterationen eine Konfiguration errechnet, die 7 der 8 vorgegebenen Rangfolgendarstellen kann. Diese Konfiguration wird mit wachsender Iterationszahl nicht mehr wesentlich verändert, die Stressverbesserungen sind darauf zurückzuführen, daß die Lage der Subjektpunkte verbessert wird, diese Punkte also in die Nähe oder in die zugehörigen Gebiete geschoben werden. Das Ergebnis nach 1oo Iterationen geben wir in Figur a.1 im Anhang wieder. Nach unseren optischen Kriterien ergibt sich folgendes Bild: nach 5o Iterationen sind 7 der 8 Rangfolgen darstellbar, 2 der 7 Rangfolgen liegen exakt in ihren Gebieten. Nach 1oo Iterationen wurde für Kriterium b) eine Verbesserung erziehlt: 3 Punkte liegen optimal. Wie aus Figur a.1 ersichtlich, hat ALSCAL in diesem Beispiel einen Hang zu degenerierten Lösungen: die beiden Objektpunkte D und E werden mit wachsender Iterationszahl übereinanderge-

schoben.

MDSCAL beginnt mit einer Startkonfiguration mit einem Stresswert von 76%. Der Iterationsverlauf sieht hier wie folgt aus:

Iterationszahl	1o	3o	5o	68
Stress	o.36	o.oo4	< o.ool	< o.ool
fehlende Rangfolgen	3	/	/	/

Bereits nach 3o Iterationen hat MDSCAL also eine Konfiguration gefunden, die die Darstellung aller 8 vorgegebener Rangfolgen zuläßt. Die Konfiguration nach 5o Iterationen mit Gebieten und Subjektpunkten geben wir in Figur a.2 wieder; 7 der 8 Rangfolgen liegen exakt in ihren Gebieten. Nach 68 Iterationen liegt auch der letzte Subjektpunkt exakt.

b) 6 Punkte 18 Rangfolgen

Problemgröße: 1o8 Distanzen sind zu berechnen

Problemcharakteristik: 18 : 1o1, d.h. ungefähr 18% des Rangfolgensystems sind vorgegeben.

ALSCAL beginnt mit einer Stress - o.26 - Konfiguration und erreicht nach kontinuierlicher Verminderung nach 5o Iterationen eine Konfiguration mit Stresswert o.o59. 14 der 18 vorgegebenen Rangfolgen sind in dieser Konfiguration darstellbar und 5 der 14 darstellbaren Rangfolgenpunkte liegen exakt in ihren Gebieten. Eine Verdopplung der Iterationszahl bringt keine Verbesserungen. Zwar verringert sich der Stresswert auf o.o39, es bleibt jedoch bei 14 darstellbaren Subjektpunkten und auch bei 5 optimalen Punkten (vgl Figur b.1). Die Startkonfiguration bei MDSCAL hat einen Stresswert von 78%. Bereits nach 2o Iterationen ist der Stresswert unter 1o% gesunken, nach 5o Iterationen ist eine Konfiguration errechnet mit Stresswert o.o44. In dieser Konfiguration sind 15 der 18 vorgegebenen Rangfolgen darstellbar und 9 dieser 15 Subjekt-

punkte liegen exakt in ihren Gebieten. Eine Verdopplung der Iterationszahl auf 1oo bringt hier deutliche Verbesserungen: in der errechneten Endkonfiguration mit Stresswert o.o17 können 17 der 18 Rangfolgen dargestellt werden, 13 der 17 Rangfolgenpunkte sind optimal dargestellt (vgl Figur b.2).

c) 6 Punkte 4o Rangfolgen

Problemgröße: 24o Distanzen sind zu berechnen

Problemcharakteristik: 4o : 1o1, d.h. ungefähr 4o% des Rangfolgensystems sind vorgegeben.

ALSCAL initiiert eine Startkonfiguration mit Stresswert o.239 und erreicht nach 5o Iterationen und kontinuierlicher Stressminimierung eine Konfiguration mit Stresswert o.o61 (bereits nach 12 Iterationen war der Stresswert unter 1o% gesunken). In dieser Konfiguration sind 3o der vorgegebenen 4o Rangfolgen darstellbar und 8 dieser 3o Rangfolgen sind als Subjektpunkte exakt eingepasst. 12 weitere Subjektpunkte liegen dicht am Rand ihres zugehörigen Gebietes, so daß man hier 2o nahezu optimale Subjektpunkte rechnen kann. Nach weiteren 5o Iterationen hat sich der Stress auf o.o49 verringert, es sind zwar keine neuen darstellbaren Rangfolgen zu den 3o hinzugekommen, allerdings sind 2 weitere Subjektpunkte an den Rand ihres Gebietes geschoben worden. Die Darstellungsqualität hat sich also gebessert (vgl Figur c.1).

MDSCAL beginnt mit einer Startkonfiguration mit Stresswert o.763 und meldet nach 51 Iterationen das Erreichen eines Minimums. Der Stresswert liegt mit 31% noch ziemlich hoch, es kann also nur ein lokales Minimum sein. In dieser Konfiguration sind 3o der 4o Rangfolgen darstellbar (es fehlen übrigens dieselben 1o Rangfolgen, die auch ALSCAL nicht darstellen konnte!), und 4 der 3o Rangfolgenpunkte liegen exakt in ihren Gebieten. Nimmt man auch hier die Punkte hinzu, die dicht am Rand ihrer Gebiete liegen, so erhält man 6 optimale Punkte. Wir haben diese Konfiguration als Startkonfiguration für einen neuen

Lauf mit 1oo Iterationen genommen. Die dabei errechnete Konfiguration hat einen Stresswert von 2o% . Wieder fehlen die gleichen 1o Rangfolgen wie oben, 4 Rangfolgenpunkte sind exakt eingepasst. Allerdings liegen hier 1o weitere Subjektpunkte dicht bei ihren Gebieten, so daß man auf insgesamt 14 optimale Punkte kommt (Figur c.2).
Dies ist das erste Beispiel in unserer Serie, in dem ALSCAL bessere Ergebnisse erzielt als MDSCAL, da zwar beide Verfahren exakt die gleiche Trefferquote haben, MDSCAL jedoch eine wesentlich schlechtere Darstellungsqualität aufzuweisen hat.

II) n = 1o Objektpunkte

Von einer Konfiguration von 1o Punkten i.a.L. haben wir mittels unseres Programms alle 916 Rangfolgengebiete bestimmen lassen. Aus diesen 916 Rangfolgen haben wir m = 9, m = 2o und m = 15o Rangfolgen ausgewählt und als Input für ALSCAL und MDSCAL verwendet.

a) 1o Punkte 9 Rangfolgen

Problemgröße: es sind 9o Distanzen zu berechnen

Problemcharakteristik: 9 : 916, also ungefähr 1% des vollständigen Systems ist vorgegeben.

ALSCAL errechnet nach 5o Iterationen eine Konfiguration mit Stress o.125. Nach 1oo Iterationen hat sich der Stress nahezu halbiert auf o.o79. Lassen wir nun von unserem Programm die darstellbaren Rangfolgengebiete berechnen, so tritt ein Desaster zutage: obwohl der relativ niedrige Stress eine ausreichend gute Approximation suggeriert, sind tatsächlich nach 1oo Iterationen nur 2 der vorgegebenen 9 Rangfolgen darstellbar! (Figur d.1)
MDSCAL ist in gleicher Weise nicht in der Lage, eine akzeptable Lösung zu finden. Die nach 5o Iterationen berechnete Konfiguration mit Stresswert o.o17

ist, ebenso wie die nach 1oo Iterationen errechnete Konfiguration mit Stresswert o.oo7, in spezieller Lage (Figur d.2). Von den 9 vorgegebenen Rangfolgen ist nach 5o Iterationen keine, nach 1oo Iterationen eine einzige darstellbar. Die von beiden Verfahren errechneten Konfigurationen sind also nicht zu verwerten!

b) 1o Punkte 2o Rangfolgen

Problemgröße: 2oo Distanzen sind zu berechnen

Problemcharakteristik: 2o : 916, also ungefähr 2% des vollständigen Systems sind vorgegeben.

ALSCAL berechnet nach 5o Iterationen eine Konfiguration mit Stresswert o.o56, in der 15 der 2o Rangfolgen darstellbar sind. Eine Erhöhung der Iterationszahl auf 1oo bringt zwar eine Verbesserung des Stresswertes auf o.o37, jedoch eine geringfügige Verschlechterung der Trefferquote: jetzt sind nur noch 14 der 2o Rangfolgen darstellbar (Figur e.1). Auch hier suggeriert der Stress (5% bzw 3%) eine bessere Anpassung als tatsächlich vorhanden.

MDSCAL bringt ein etwas besseres Ergebnis: nach 5o Iterationen ist eine Konfiguration mit Stresswert o.o21 berechnet, in der 13 der 2o Rangfolgen darstellbar sind. Die Konfiguration mit Stresswert o.o11 (Figur e.2), die nach weiteren 5o Iterationen bestimmt wurde, lässt immerhin schon 17 der 2o vorgegebenen Rangfolgen als exakt darstellbar zu.

c) 1o Punkte 15o Rangfolgen

Problemgröße: 15oo Distanzen sind zu berechnen

Problemcharakteristik: 15o : 916, also ungefähr 15% des vollständigen System sind vorgegeben.

Beide Verfahren waren ausserstande, die Problemstellung zu bewältigen: ALSCAL errechnet nach 5o und nach 1oo Iterationen jeweils Konfigurationen in

spezieller Lage mit Stresswerten o.o9 bzw o.o2, deren vollständige Rangfolgensysteme keine der vorgegebenen 15o Rangfolgen enthielten (Figur f.1).
MDSCAL verfängt sich zweimal in lokalen Minima, bei 63 und 68 Iterationen, mit Stresswerten von o.56 und o.5o2. Auch hier lassen die errechneten Konfigurationen keine der 15o Rangfolgen als darstellbar zu (Figur f.2).

III) n = 15 Objektpunkte

Wie in den Beispielen I und II haben wir von einer Konfiguration von 15 Punkten i.a.L. mit Hilfe unseres Programmes das Rangfolgensystem von 5111 darstellbaren Rangfolgen bestimmen lassen und daraus 14 Rangfolgen zufällig ausgewählt.

15 Punkte 14 Rangfolgen

Problemgröße: 21o Distanzen sind zu berechnen

Problemcharakteristik: 14 : 5111, also ungefähr o.3% des vollständigen Systems sind vorgegeben.

Das Testergebnis fiel für beide Verfahren negativ aus:
ALSCAL berechnet nach 5o Iterationen eine Konfiguration mit Stresswert o.o5, in der 3 der 14 Rangfolgen darstellbar sind. Nach 1oo Iterationen hat sich zwar der Stresswert halbiert auf o.o29, jedoch ist nur eine weitere Rangfolge in dieser Konfiguration darstellbar (Figur g.1).
MDSCAL verfängt sich nach 36 Iterationen in einem lokalen Minimum mit Stresswert o.o83, das keine der 14 Rangfolgen darstellen kann. Mit diesem lokalen Minimum als Startkonfiguration errechnet MDSCAL in einem neuen Lauf nach 1oo Iterationen eine Konfiguration mit Stresswert o.oo3, in der 6 der 14 vorgegebenen Rangfolgen darstellbar sind (Figur g.3).

2.4 Zusammenfassung: Bewertung der getesteten iterativen Entfaltungsprogramme und Schlußfolgerungen

Wir haben in unserem Vergleich nur Beispiele verwendet, in denen die vorgegebenen Rangfolgen tatsächlich darstellbar waren, d.h. es gab immer eine Konfiguration von n Objektpunkten, die die vorgegebenen Rangfolgen als Gebiete in ihrem Rangfolgensystem enthielt. Deshalb können wir zur Bewertung der Testergebnisse einen strengen Maßstab anlegen. Und nach diesem Maßstab schneiden die Verfahren ALSCAL und MDSCAL schlecht ab! Es gab nur einen einzigen Fall bei den insgesamt 7 Beispielen, in dem von einem Programm die optimale Anpassung erzielt wurde, nämlich das Beispiel Ia), 6 Punkte 8Rangfolgen, zu dem MDSCAL eine Lösung errechnete, in der alle 8 Rangfolgen darstellbar sind und die 8 Subjektpunkte auch exakt in ihren Gebieten liegen.
Tabellieren wir die jeweils besten Ergebnisse beider Verfahren:

ALSCAL

Beisp.	Stress	Kriterium a
6 8	o.oo2	7 von 8
6 18	o.o39	14 von 18
6 4o	o.o49	3o von 4o
1o 9	o.o79	2 von 9
1o 2o	o.o56	15 von 2o
1o 15o	o.o24	o von 15o
15 14	o.o29	4 von 14

MDSCAL

Beisp.	Stress	Kriterium a
6 8	o.oo1	8 von 8
6 18	o.o17	17 von 18
6 4o	o.2o	3o von 4o
1o 9	o.oo7	1 von 9
1o 2o	o.o11	17 von 2o
1o 15o	o.5o2	o von 15o
15 14	o.oo3	6 von 14

In drei Fällen konnten beide Verfahren keine auch nur annähernd befriedigende Lösung errechnen, nämlich in den Fällen ii a), 1o Punkte 9 Rangfolgen, II c), 1o Punkte 15o Rangfolgen und III, 15 Punkte 14 Rangfolgen.
Da man im Fall II c) nicht von einer überbestimmten Problemstellung sprechen kann (15o Rangfolgen sind zwar absolut gesehen eine große Zahl, sie bilden aber nur ungefähr 15% des vollständigen Rangfolgensystems einer Konfiguration von 1o Punkten i.a.L.), war der Problemumfang wohl zu groß (15oo Distanzen waren zu bestimmen). Im Gegensatz dazu waren beide Verfahren im Beispiel I c), 6 Punkte 4o Rangfolgen, (also einem Beispiel, wo mit 4o% des Rangfolgensystems sehr viel mehr Zwänge vorherbestimmt waren) wesentlich erfolgreicher.
Einigermassen zufriedenstellende Ergebnisse lieferten beide Verfahren in den Fällen I a), I b), I c) und II b) wobei die von MDSCAL gefundenen Lösungen bis auf den Fall I c) eindeutig besser sind, sowohl was die Anzahl der darstellbaren Rangfolgen als auch die Anzahl der exakt dargestellten Subjektpunkte angeht.
Weiterhin ist zu beobachten, daß der Stress bei beiden Verfahren ein sehr unzuverlässiges Gütemaß ist. So hat beispielsweise bei MDSCAL die Lösung im Fall 6 Punkte, 4o Rangfolgen einen Stresswert von 2o%, Obwohl das Ergebnis einigermaßen akzeptabel ist (immerhin 3o der 4o vorgegebenen Rangfolgen sind darstellbar), während im Fall 15 Punkte 14 Rangfolgen der Stresswert o.oo3 eine gute Lösung anzeigt, obwohl nicht einmal die hälfte der vorgegebenen Rangfolgen darstellbar ist. Ähnliches gilt, wenn auch abgemildert, für ALSCAL, etwa bei den Fällen 1o Punkte, 2o Rangfolgen und 15 Punkte, 14 Rangfolgen, wo der Stress im zweiten Fall halb so groß ist wie im ersten, obwohl die Darstellungsqualität gerade umgedreht ist.
Unser Vergleich hat weiter gezeigt, daß beide Verfahren auch bei kleinen Beispielen schon eine große Anzahl von Iterationen benötigen, um überhaupt zu Lösungen zu kommen.

Schließlich zeigen die Beispiele I c), 6 Punkte 4o Rangfolgen und III, 15 Punkte 14 Rangfolgen, daß die im Programm MDSCAL eingebauten Abbruchkriterien und die Schrittweitenberechnung ungünstig sind, da in beiden Fällen der Algorithmus an Stellen abgebrochen wird, die noch weit von einer akzeptablen Lösung entfernt sind.

Unser Vergleich kann aufgrund des geringen Testumfangs keinen Anspruch auf generelle Aussagen haben. Jedoch läßt die Tendenz, die in den Ergebnissen sichtbar wird, einige bewertende Schlußfolgerungen zu, die auch auf die übrigen iterativen Entfaltungsprogramme anwendbar sind, da diese einen ähnlichen Aufbau (Minimieren einer ähnlichen Zielfunktion) aufweisen:

a) Der Stresswert als einziges Gütemaß und als wichtigste Größe bei den Abbruchkriterien der Verfahren ist sicherlich unzureichend. Wie wir in einigen Beispielen gesehen haben, muß ein geringer Stresswert mit einer befriedigenden Lösung im Sinne einer guten Anpassung nicht unbedingt viel zu tun haben.

b) Die Verfahren scheinen einen natürlichen Hang zu lokalen Minima zu haben, der nicht zu umgehen ist. Dies beinhaltet erhebliche Zweifel an der Zuverlässigkeit der von den Verfahren angebotenen Lösungen und ihrer Interpretationsfähigkeit.

Man kann nun versuchen, diese Schwächen der bestehenden Entfaltungsprogramme zu korrigieren durch Veränderungen in der Zielfunktion und/oder durch Hinzunahme weiterer Gütemaße. Wir wollen in dieser Arbeit einen anderen Weg gehen, der auf der folgenden Überlegung basiert:

Wie wir in den Abschnitten 2.1 und 2.2 dieses Kapitels gesehen haben, ist das Entfaltungsproblem eigentlich eine rein geometrische Aufgabenstellung: gegeben eine Menge von Rangfolgengebieten; bestimme dazu eine Konfiguration von n Punkten in der Ebene, so daß die Zerlegung der Ebene durch die $\binom{n}{2}$ Mittelsenk-

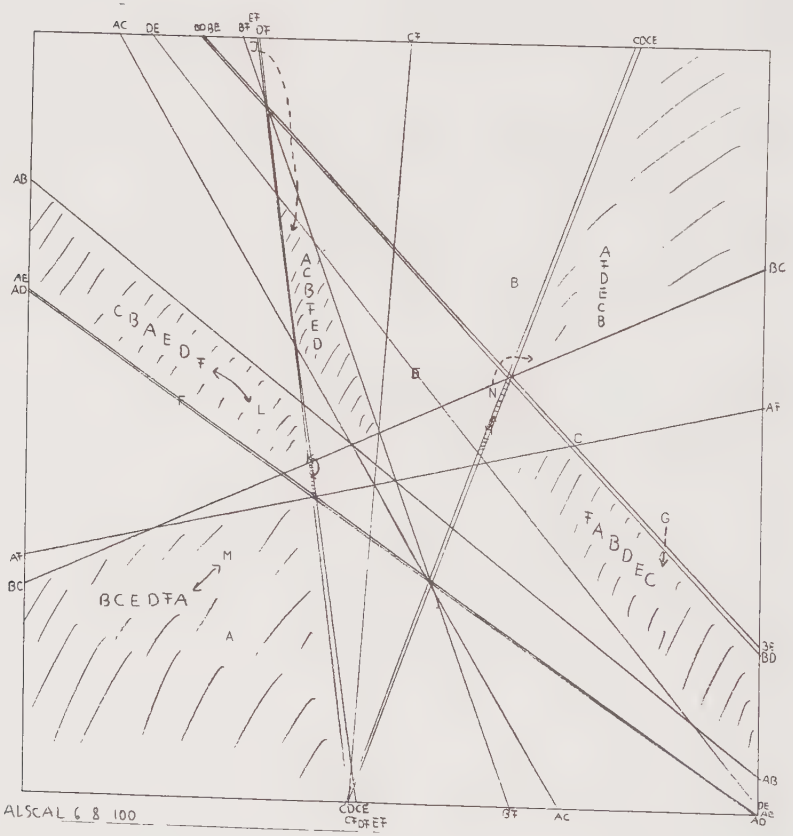
rechten zu diesen Punkten die vorgegebenen Gebiete enthält. Es sollte doch eigentlich möglich sein, diese Aufgabe durch direkte Konstruktion auch geometrisch zu lösen. Eine solche direkte, konstruktive Lösung wird in den folgenden Kapiteln beschrieben. Dabei ergibt sich in natürlicher Weise eine Fallunterscheidung bezüglich der Anzahl der vorgegebenen Rangfolgen:

Fall A: Die Menge R der vorgegebenen Rangfolgen ist ein vollständiges Rangfolgensystem, d.h. $|R| = m = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\cdot\left[\binom{n}{2} + 1\right] + 1 - \binom{n}{3}$

Fall B: Die Menge R der vorgegebenen Rangfolgen ist unvollständig, d.h.
$|R| = m < \frac{1}{2}\binom{n}{2}\cdot\left[\binom{n}{2} + 1\right] + 1 - \binom{n}{3}$

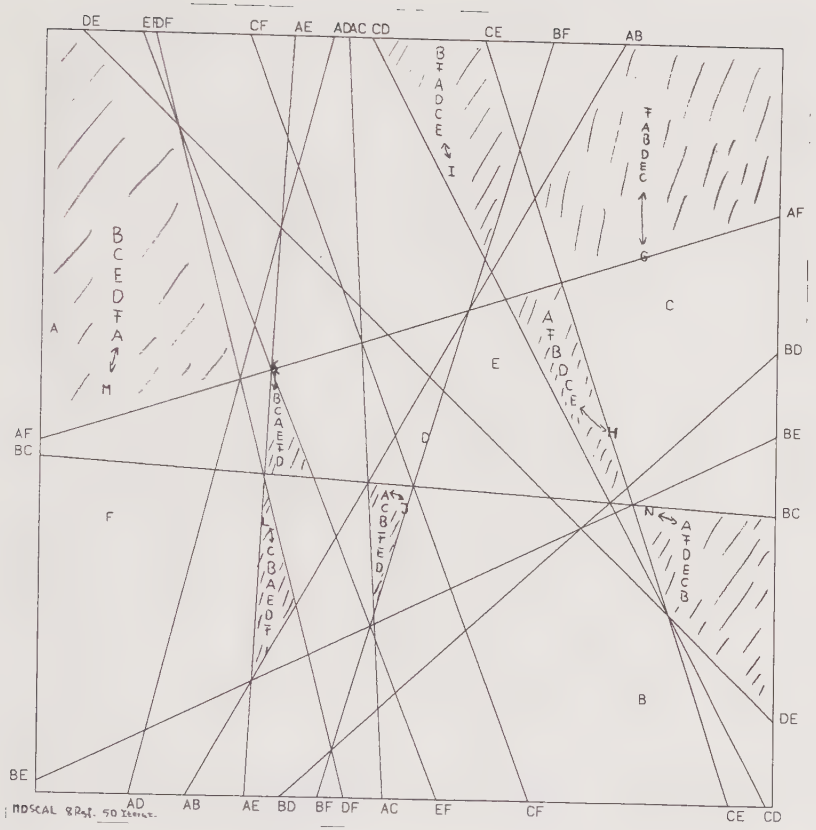
Fall A wird im Kapitel 3 gelöst. Der schwierigere, aber für die Praxis relevantere Fall B ist in Kapitel 4 behandelt.

2.5 Anhang: Die von den getesteten Programmen errechneten jeweils besten Darstellungen



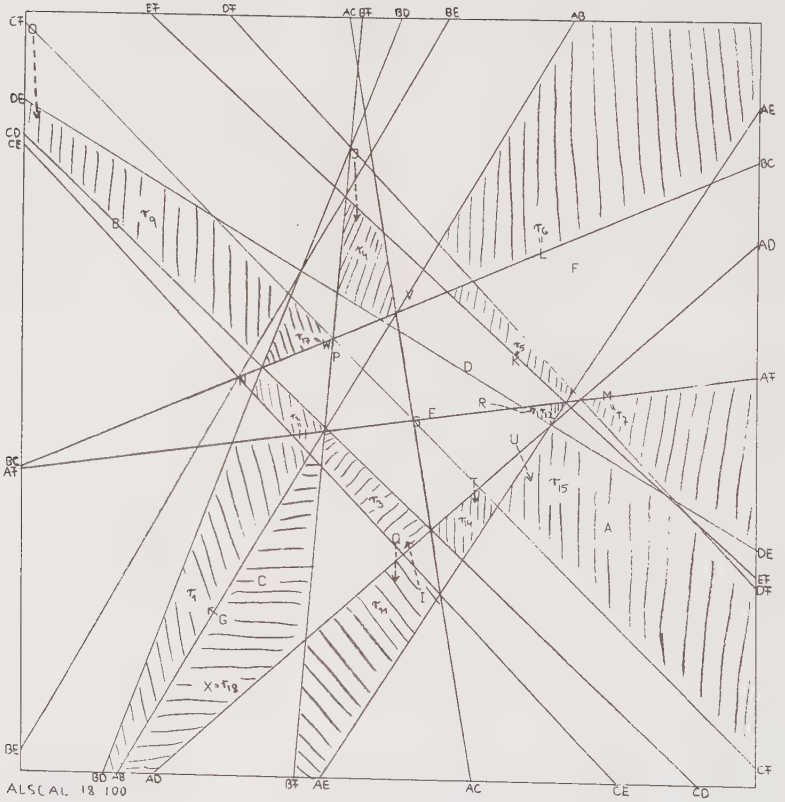
Figur a.1 6 Punkte 8 Rangfolgen

ALSCAL 1oo Iterationen



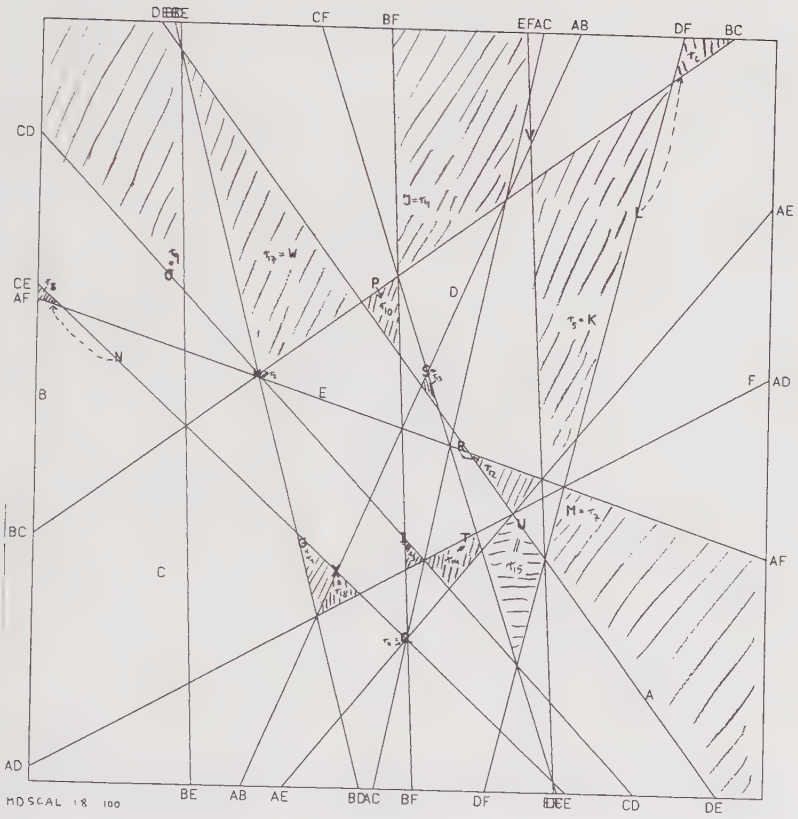
Figur a.2 6 Punkte 8 Rangfolgen

MDSCAL 5o Iterationen



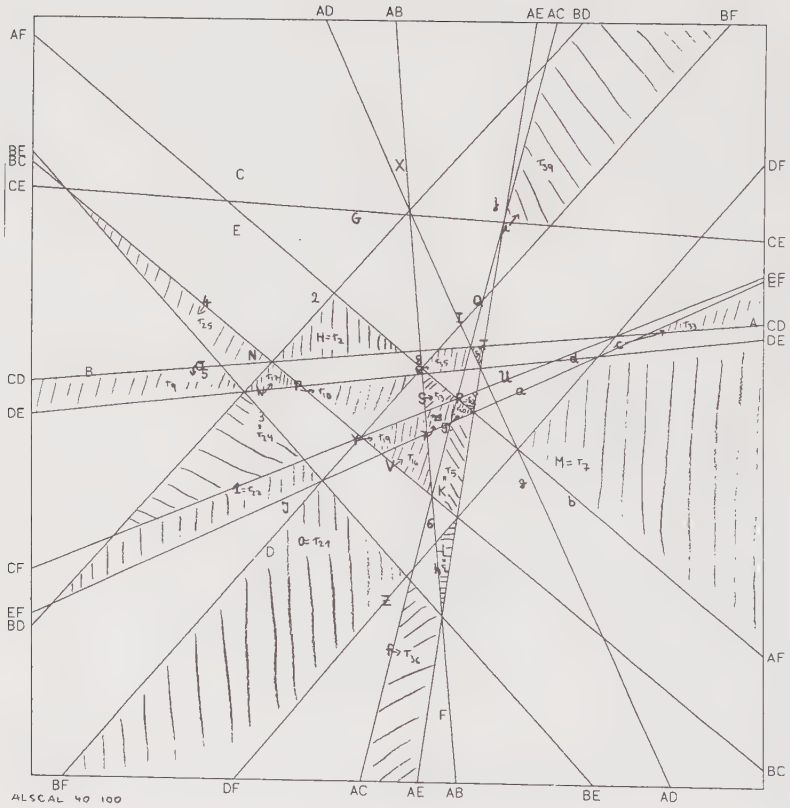
Figur b.1 6 Punkte 18 Rangfolgen

ALSCAL 1oo Iterationen



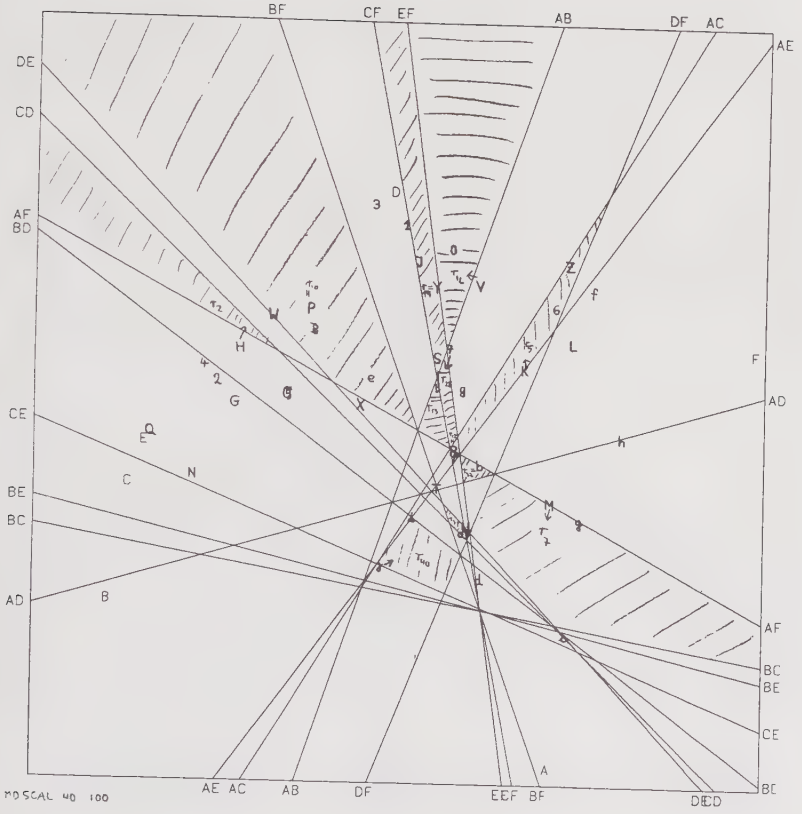
Figur b.2 6 Punkte 18 Rangfolgen

MDSCAL 1oo Iterationen



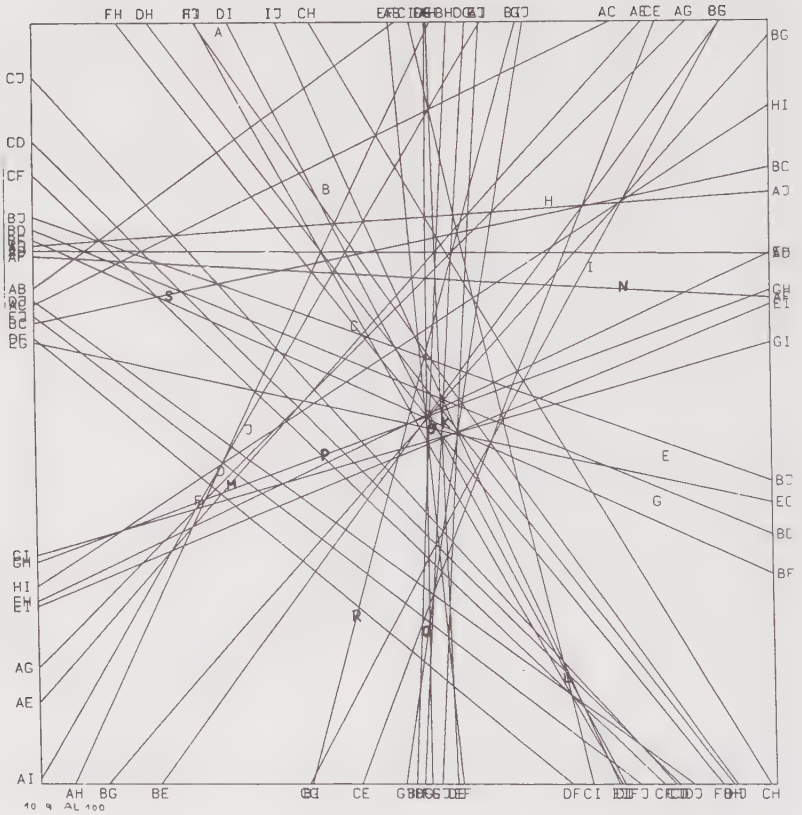
Figur c.1 6 Punkte 4o Rangfolgen

ALSCAL 1oo Iterationen



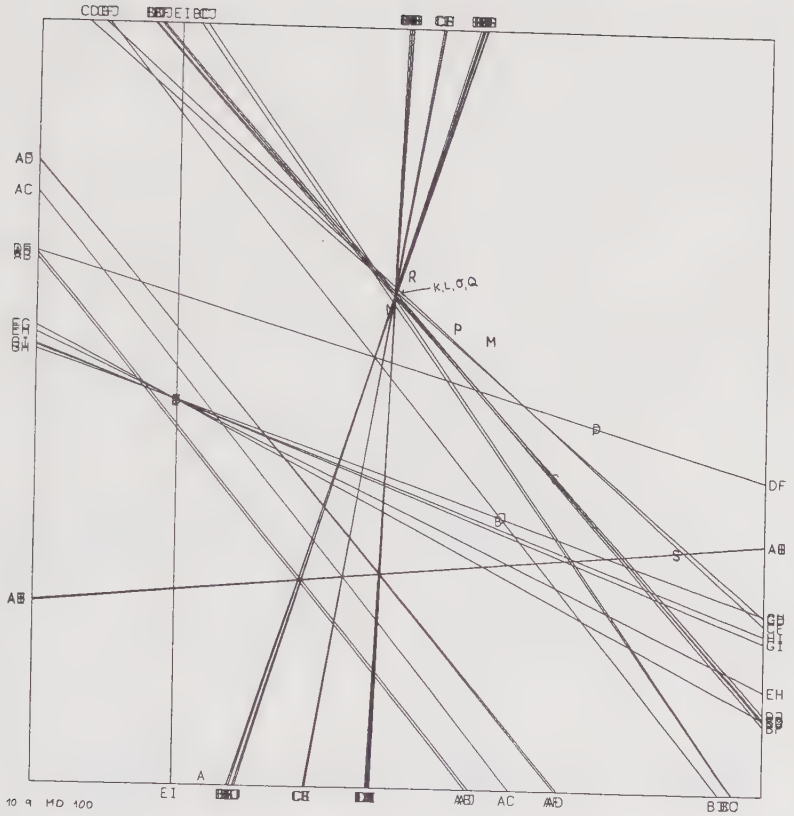
Figur c.2 6 Punkte 4o Rangfolgen

MDSCAL 1oo Iterationen



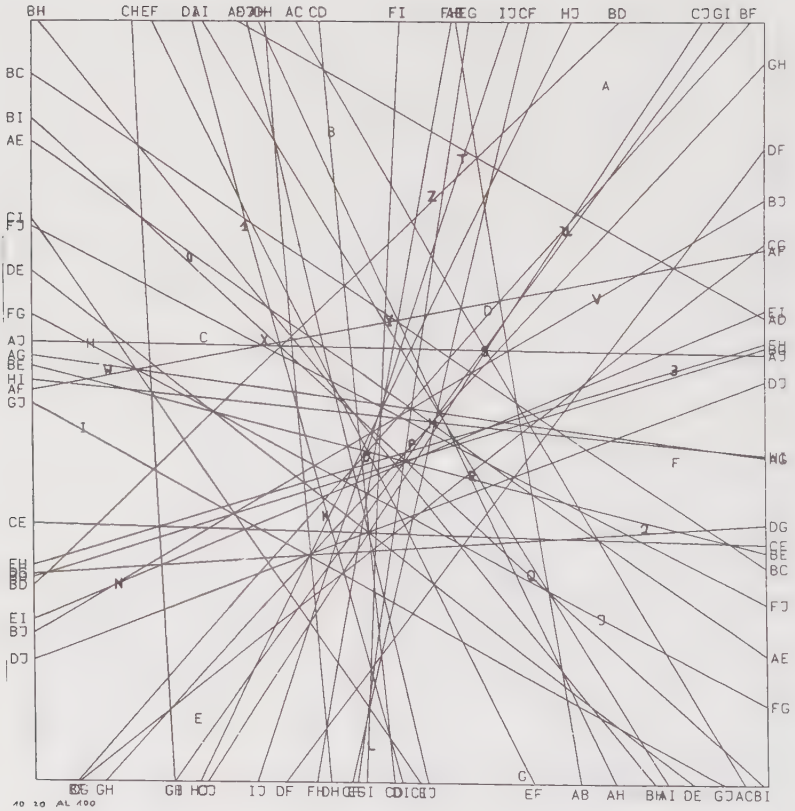
Figur d.1 1o Punkte 9 Rangfolgen

ALSCAL 1oo Iterationen



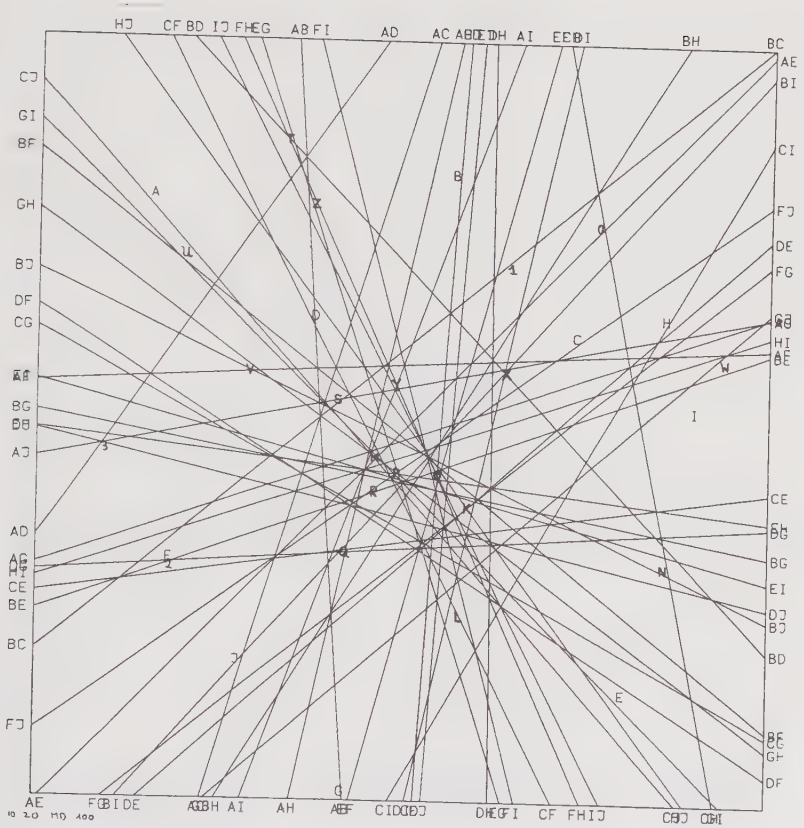
Figur d.2 1o Punkte 9 Rangfolgen

MDSCAL 1oo Iterationen



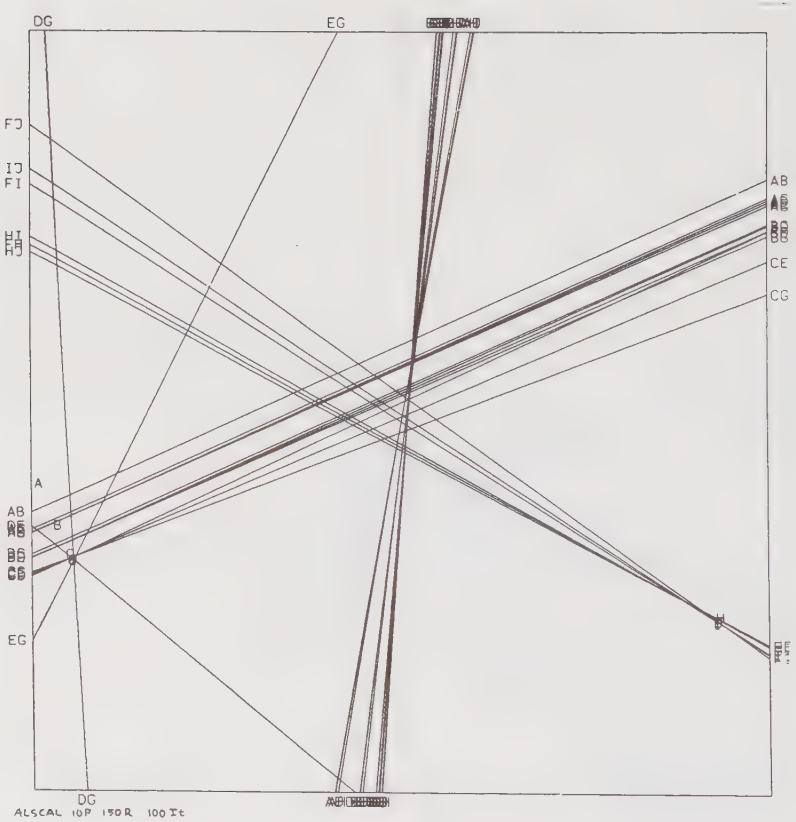
Figur e.1 1o Punkte 2o Rangfolgen

ALSCAL 1oo Iterationen



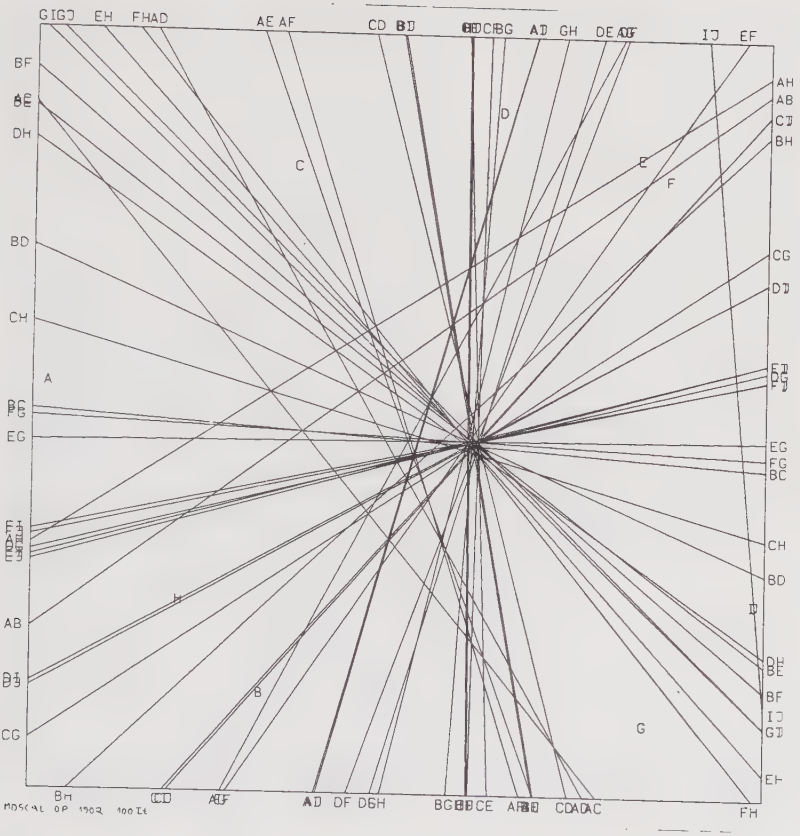
Figur e.2 1o Punkte 2o Rangfolgen

MDSCAL 1oo Iterationen



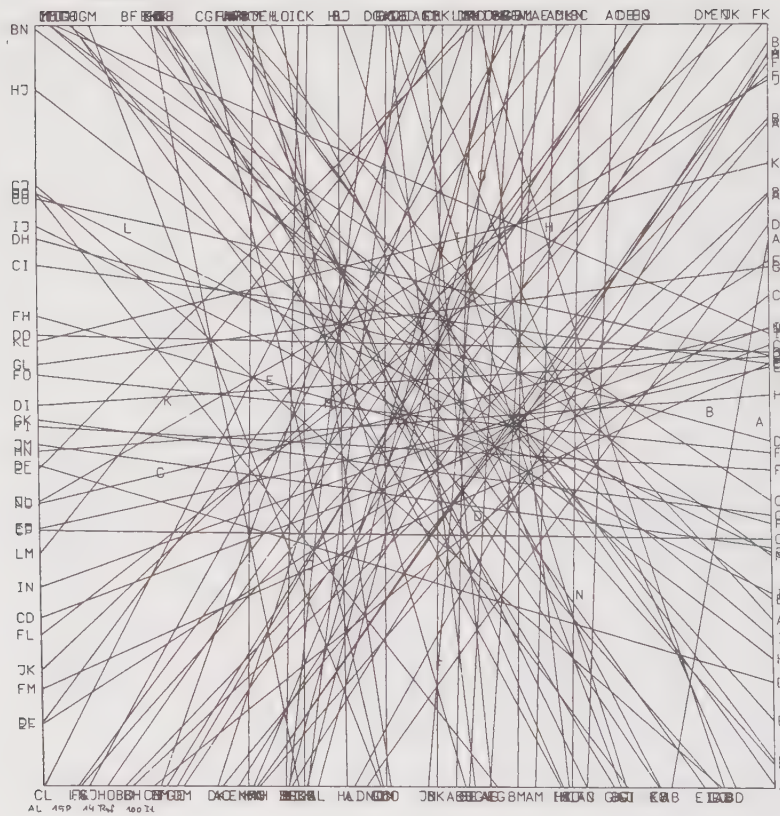
Figur f.1 1o Punkte 15o Rangfolgen

ALSCAL 1oo Iterationen



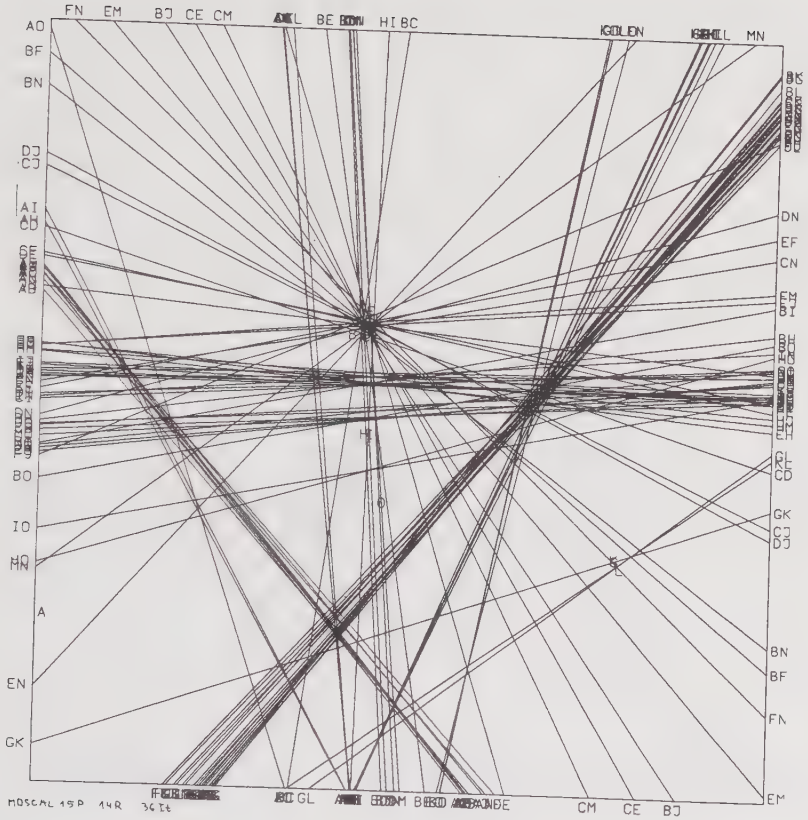
Figur f.2 1o Punkte 15o Rangfolgen

MDSCAL 68 Iterationen



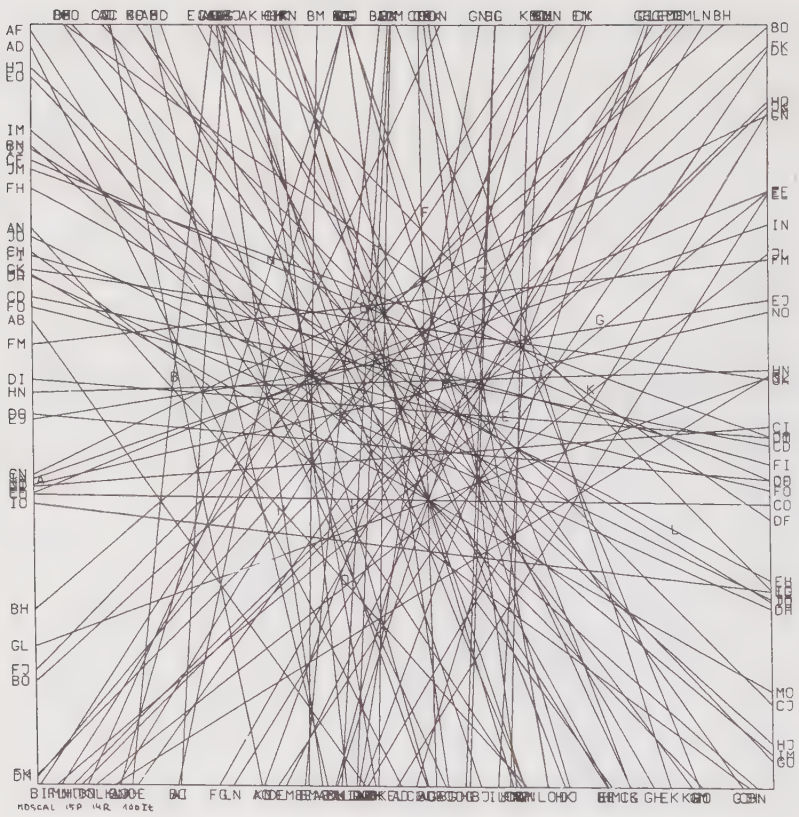
Figur g.1 15 Punkte 14 Rangfolgen

ALSCAL 1oo Iterationen



Figur g.2 15 Punkte 14 Rangfolgen

MDSCAL 36 Iterationen



Figur g.3 15 Punkte 14 Rangfolgen

MDSCAL 1oo Iterationen

Kapitel 3 Konstruktive Lösung des zweidimensionalen Entfaltungsproblems bei vorgegebenem *vollständigen* Rangfolgensystem

Im ersten Teil dieses Kapitels, der die Abschnitte 3.1 bis 3.4 einschließlich umfaßt, werden wir aus einem vorgegebenen darstellbaren vollständigen Rangfolgensystem eine qualitative Struktur der zugehörigen Konfiguration von n Objektpunkten herleiten. Diese zweidimensionale Struktur ist die qualitative Anordnung der n Punkte als Extremalpunkte ineinander-geschachtelter geschlossener Polygonzüge. In Abschnitt 3.5 zitieren wir dann die 1972 von J.A. Davidson,[4], entwickelten Kriterien zur quantitativen Lagebestimmung der n Objektpunkte. Die qualitative und quantitative Bestimmung der Objektkonfiguration ermöglicht dann eine effiziente konstruktive Lösung des Entfaltungsproblems bei vorgegebenem vollständigen Rangfolgensystem. Dies beschreiben wir in Abschnitt 3.6 . In Abschnitt 3.7 schließlich wenden wir die in 3.1 bis 3.4 gewonnenen Erkenntnisse an zur Abschätzung der Anzahl qualitativ verschiedener, zweidimensionaler Objektpunkt-Konfigurationen, analog zum eindimensionalen Fall in Abschnitt 1.1 von Kapitel 1 (Satz 1.1.3).

3.1 Die Sektoren

Es sei $\mathcal{R}_{K_n}$ ein vollständiges System von Rangfolgen bzgl einer Konfiguration von n Objektpunkten $A_1,\ldots,A_n$ gegeben,

$$\mathcal{R}_{K_n} = \left\{ A_{i_1} \ldots A_{i_n} \;\middle|\; 1 \leq i \leq s,\ s = \tfrac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2} + 1 \right) + 1 - \binom{n}{3} \right\}$$

In diesem System fassen wir alle Rangfolgen, die mit dem gleichen Symbol beginnen, zusammen und definieren:

Definition 3.1.1 Ein Sektor $/A_i \subset \mathcal{R}_{K_n}$ ist die Menge aller Rangfolgen von $\mathcal{R}_{K_n}$, die mit dem gleichen Symbol beginnen:

$$/A_i := \left\{ A_i A_{j_1} \ldots A_{j_{n-1}} \in \mathcal{R}_{K_n} \right\}$$

Geometrisch ist ein Sektor $/A_i$ also die Vereinigung aller Rangfolgengebiete, die zum Objektpunkt A_i den weitesten Abstand haben. Jeder Sektor ist nach Konstruktion endlicher Durchschnitt gewisser konvexer Halbräume, die von den $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrechten gebildet werden, also ist jeder Sektor konvexer Teilraum des R^2.

Bemerkung 3.1.2 In unseren Untersuchungen verwenden wir den Rangfolgenbegriff in folgendem Sinne: Sind $A_1,\ldots,A_n$ Konfigurationspunkte, so entspricht eine Rangfolge oder ein Rangfolgengebiet der Beziehung:

$$d(x,A_{i_1}) > d(x,A_{i_2}) > \ldots > d(x,A_{i_n})$$

Für alle x, die dieser Beziehung genügen, sagen wir, x liegt im Gebiet mit Namen $A_{i_1} \ldots A_{i_n}$. Zu diesen Rangfolgen haben wir (auf willkürliche Art) Sektoren definiert als die Menge aller Rangfolgen, die mit dem gleichen Symbol beginnen. Diese Notation ist vollkommen symmetrisch zur Definition der Rangfolgen durch "$<$" statt durch "$>$", und gleichzeitiger Definition der Sektoren durch das letzte Symbol, d.h. als Menge von Rangfolgen, die mit dem gleichen Symbol aufhören.

Nimmt man dagegen die Definition der Rangfolgen durch "$<$" und Sektoren als Mengen von Rangfolgen, die mit dem gleichen Symbol beginnen, so ändert sich die Lage: jede Konfiguration von n Punkten bzw ihr Rangfolgensystem enthält nun immer alle n Sektoren, denn zu jedem Konfigurationspunkt A_i gibt es eine Umgebung, in der jeder Punkt zu A_i näher liegt als zu allen anderen Konfigurationspunkten A_j.

Beispiel 3.1.3 Die Konfiguration von 4 Objektpunkten A,B,C,D auf Seite 15 hat das folgende Rangfolgensystem mit den Sektoren

/A	/B	/C	/D
ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BDAC	CDAB	DBAC
ACDB			DBCA
ADBC			DCAB
ADCB			DCBA

Nach unserer Definition muß nicht jedes Rangfolgensystem alle möglichen Sektoren enthalten. Wir werden später sehen, daß es einen engen Zusammenhang gibt zwischen der Struktur der Objektkonfiguration K_n und den in $\mathcal{R}_{K_n}$ auftretenden Sektoren.

Formal kann ein Sektor maximal (n-1)! Elemente enthalten, da nach Definition das erste Symbol jedes Elements fest bleiben muß, alle übrigen n-1 Symbole permutieren können. Aber bereits ab n = 6 ist (n-1)! größer als die Kardinalität des Systems $\mathcal{R}_{K_n}$, das den Sektor enthalten soll, d.h. tatsächlich enthält ein Sektor sehr viel weniger Elemente als (n-1)!. Eine schärfere Abschätzung der Anzahl der Rangfolgen in einem Sektor $/A_i \subset \mathcal{R}_{K_n}$ gibt

Lemma 3.1.4 Es sei K_n eine Konfiguration von n Punkten i.a.L. im R^2, $\mathcal{R}_{K_n}$ das zugehörige Rangfolgensystem und $/A_1, \ldots, /A_r$ die Sektoren in $\mathcal{R}_{K_n}$. Dann gilt:

$$\left|A_i\right| \leq \left|\mathcal{R}_{K_{n-1}}\right|$$

wo $\mathcal{R}_{K_{n-1}}$ ein Rangfolgensystem bzgl n-1 Punkten i.a.L. im R^2 ist.

Beweis: Sei $/A_i$ maximaler Sektor in $\mathcal{R}_{K_n}$; in $/A_i$ darf das Symbol A_i nicht vertauscht werden. Es sei $\mathring{/A}_i$ der topologisch offene Sektor $/A_i$, d.h. ohne die Randgeraden A_iA_j, $j = 1,\ldots, n$, $j \neq i$.

Es gilt: $\left|\mathring{/A}_i\right| = \left|/A_i\right|$

Die maximale Größe von $\mathring{/A}_i$ wird erreicht, wenn alle übrigen $\binom{n-1}{2}$ Mittelsenkrechten durch $\mathring{/A}_i$ gehen. Dann ist $\mathring{/A}_i$ aber nichts anderes als ein $\mathcal{R}_{K_{n-1}}$ bzgl der Punkte $A_1,\ldots,A_n$ ohne A_i. Also gilt $\left|\mathring{/A}_i\right| = \left|/A_i\right| \leq \left|\mathcal{R}_{K_{n-1}}\right|$.

q.e.d.

3.2 Der Aufbau der Objektkonfiguration als Extremalpunkte ineinandergeschachtelter Polygonschalen

Den für alle folgenden Untersuchungen wichtigen Zusammenhang zwischen einer Objektkonfiguration K_n und dem Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_n}$ stellt Satz 3.2.1 her:

Satz 3.2.1 Es sei K_n eine Konfiguration von n Punkten i.a.L., $\mathcal{R}_{K_n}$ das zugehörige Rangfolgensystem. Dann gilt:
$\mathcal{R}_{K_n}$ enthält den Sektor $/A_i$ genau dann, wenn A_i Extremalpunkt der konvexen Hülle von K_n ist.

Beweis: Ein Sektor in $\mathcal{R}_{K_n}$ ist nach Definition die Menge aller Rangfolgengebiete, in denen jeder Punkt zu einem Konfigurationspunkt den weitesten Abstand hat, d.h. ist $/A_i$ ein Sektor in $\mathcal{R}_{K_n}$, so gibt es immer einen Kreis, der alle Konfigurationspunkte ausser A_i einschließt.

"$\Longrightarrow$" Es sei $/A_i$ ein Sektor in $\mathcal{R}_{K_n}$. Zu einem Punkt p und einem Kreis im R^2

mit p ∉ Kreis gibt es immer eine Gerade durch p, deren Schnittpunkt mit dem Kreis leer ist.

Annahme: A_i ist nicht Extremalpunkt der konvexen Hülle von K_n.

Lege eine beliebige Gerade durch A_i. Diese unterteilt den R^2 in zwei Halbräume, in jedem dieser Halbräume liegt noch mindestens ein Punkt der restlichen n-1 Konfigurationspunkte. Es gibt also keinen Kreis, der alle Punkte auuser A_i einschließt (dieser Kreis muß in einem der Halbräume liegen). Damit folgt: der Punkt A_i definiert keinen Sektor. Widerspruch!

"$\Longleftarrow$" Es sei A_i ein Extremalpunkt der konvexen Hülle von K_n.

Dann existieren zu A_i Kreise im R^2, die alle n-1 Konfigurationspunkte ausser A_i einschließen (dies folgt aus der Konvexität). A_i definiert also einen Sektor $\measuredangle A_i$ in $\mathcal{R}_{K_n}$.

q.e.d.

Dieser Satz hat eine ganze Reihe von Implikationen. zunächst wollen wir die naheliegendsten Folgerungen auflisten

Korollar 3.2.2 $\mathcal{R}_{K_n}$ enthält alle n Sektoren genau dann wenn die n Punkte von K_n alle Extremalpunkte der konvexen Hülle von K_n sind.

Korollar 3.2.3 Eine Konfiguration von n Punkten i.a.L. enthält mindestens drei Sektoren.

Genauere Angaben über die Mindestzahl von Sektoren einer Konfiguration K_n kann man leider nicht machen. Versucht man etwa, die Anzahl r_n der Sektoren einer Konfiguration K_n aus der Anzahl r_{n-1} der Sektoren einer Konfiguration K_{n-1} mit n-1 Punkten, aus der K_n entstanden ist, herzuleiten, so stellt man fest, daß alle möglichen Fälle auftreten können:

i) $r_n = r_{n-1}$: dies bedeutet: entweder kommt hier der Sektor bzgl des neuen Punktes A_n nicht vor (das liegt daran, daß alle neuen Mittelsenkrechten A_iA_n jeweils nicht durch die Sektoren $/A_i$ aus K_{n-1} gehen), oder der Sektor $/A_n$ hat einen der Sektoren aus K_{n-1} geschluckt.

ii) $r_n > r_{n-1}$: bedeutet, daß der Punkt A_n auch einen neuen Sektor erzeugt.

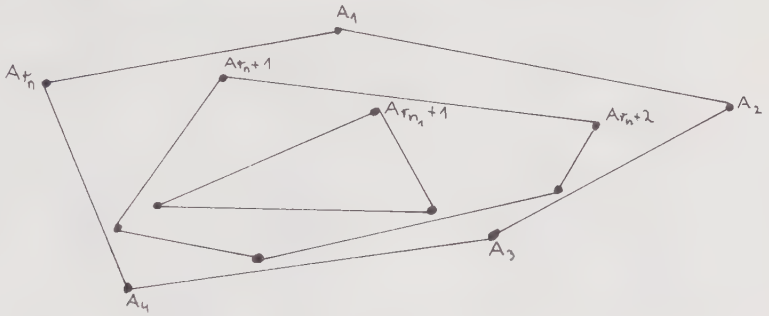
iii) $r_n < r_{n-1}$: in diesem Fall enthält der Sektor $/A_n$ zwei oder mehr Sektoren aus K_{n-1}. Die Bedingungen, wann dies möglich ist, hängen stark von der Lage der Punkte in K_{n-1} ab.

Anhand dieser Überlegungen können wir mit Satz 3.2.1 die folgende Aussage über den Aufbau von K_n machen:

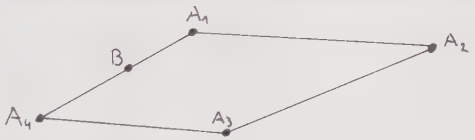
Korollar 3.2.4 Ist K_n eine Konfiguration von n Punkten i.a.L. und $\mathcal{R}_{K_n}$ zugehöriges Rangfolgensystem mit $r_n < n$ Sektoren, so ist K_n entstanden aus einer Konfiguration K_{n_1} mit $n_1 = r_n$ Punkten i.a.L. durch geeignetes Hinzufügen der restlichen $n-r_n$ Punkte in das von $A_1,..,A_{n_1}$ gebildete konvexe Gebiet.

Wir haben mit Satz 3.2.1 die r_n Extremalpunkte der konvexen Hülle einer Konfiguration K_n aus dem zugehörigen Rangfolgengebiet hergeleitet. Alle restlichen $n-r_n$ Punkte von K_n liegen nach Korollar 3.2.4 in dem von einem konvexen Polygon berandeten Gebiet. Löscht man nun in allen Rangfolgen von $\mathcal{R}_{K_n}$ die r_n Symbole, die die Sektoren in $\mathcal{R}_{K_n}$ definieren, so erhält man ein neues Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_{n_1}}$, nämlich gerade das System bzgl der Konfiguration der $n_1 = n-r_n$ restlichen Punkte.
Man kann nun die r_{n_1} Sektoren in diesem System $\mathcal{R}_{K_{n_1}}$ bestimmen und erhält so ein zweites, innerhalb der ersten Polygonschale gelegenes Polygon mit r_{n_1} Ex-

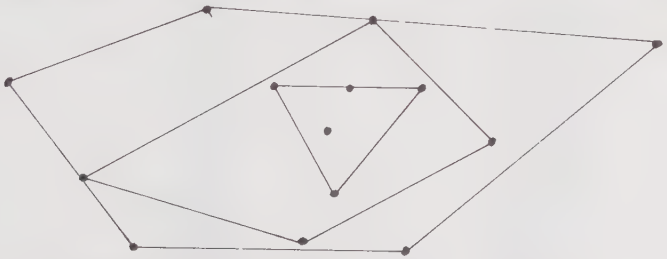
tremalpunkten. Setzt man diesen Prozeß fort, bis nur noch höchstens zwei Punkte der ursprünglichen Konfiguration K_n übrig sind, so erhält man damit den Aufbau von K_n als Extremalpunkte ineinandergeschachtelter Polygonschalen:



Bemerkung 3.2.5 Es seien $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{r_n}}$ die Extremalpunkte der konvexen Hülle von K_n. Diese Punkte haben wir durch Satz 3.2.1 gefunden. Satz 3.2.1 schließt jedoch nicht aus, daß gewisse der übrigen Punkte auf den Verbindungsstrecken der Extremalpunkte der konvexen Hülle liegen und keine Sektoren erzeugen. Ist zum Beispiel



gegeben, so gibt es zu B keinen Kreis mit Mittelpunkt irgendwo im R^2, der alle Punkte ausser B einschließt. Damit kann B keinen Sektor definieren. B ist aber gewiß ein Sektor des reduzierten Rangfolgensystems $\mathcal{R}_{K_{n_1}}$. Es ist also möglich, daß die ineinandergeschachtelten Polygonschalen aneinanderhängen:



Wir wollen die Gedankengänge am folgenden Beispiel erläutern:

Beispiel 3.2.6 Gegeben sei ein Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_7}$ bzgl einer Konfiguration von 7 Punkten K_7 i.a.L.:

DACEGBF	EADBFCG	EGDACBF	FBEACDG	GCBDFAE	GFBCAED
DACGEBF	EADFBCG	EGDACFB	FBEACGD	GCBFDAE	GFBCEAD
DAECGBF	EAFBDCG	EGDAFCB	FBEAGCD	GCDABEF	GFBECAD
DAEGCBF	EAFDBCG	EGDFABC	FBEGACD	GCDABFE	GFCBADE
DAGCEBF	EDABCFG	EGDFACB	FBEGCAD	GCDAEBF	GFCBAED
DAGECBF	EDABCGF	EGFDABC	FBGCAED	GCDAEFB	GFCBDAE
DEACBGF	EDABFCG	EGFDACB	FBGCEAD	GCDAFBE	GFCBDEA
DEACGBF	EDABFGC		FBGEACD	GCDAFEB	GFCBEAD
DEAGCBF	EDABGCF		FBGECAD	GCDBAFE	GFCBEDA
DEGACBF	EDABGFC		FEBACDG	GCDBFAE	GFCDBAE
DGACEBF	EDACBFG		FEBACGD	GCDEAFB	GFCDBEA
DGAECBF	EDACBGF		FEBADCG	GCDEFAB	GFCDEAB
DGCAEBF	EDACGBF		FEBADGC	GCDFABE	GFCDEBA
DGCEABF	EDAFBCG		FEBAGCD	GCDFAEB	GFCEBAD
DGEACBF	EDAFBGC		FEBAGDC	GCDFBAE	GFCEBDA
DGECABF	EDAFGBC		FEBGACD	GCDFBEA	GFCEDAB
	EDAGBCF		FEBGADC	GCDFEAB	GFCEDBA
	EDAGBFC		FEGABDC	GCDFEBA	GFDCEAB
	EDAGCBF		FEGADBC	GCFBADE	GFDECAB
	EDAGCFB		FEGBACD	GCFBDAE	GFEBACD
	EDAGFBC		FEGBADC	GCFDBAE	GFEBADC
	EDAGFCB		FEGBDAC	GCFDBEA	GFEBCAD
	EDFABGC		FEGDABC	GCFDEAB	GFEBCDA
	EDFAGBC		FEGDBAC	GCFDEBA	GFEBDAC
	EDFGABC		FGBCADE	GDCABEF	GFEBDCA
	EDGACBF		FGBCAED	GDCAEBF	GFECBAD
	EDGACFB		FGBCEAD	GDCAEFB	GFECBDA
	EDGAFBC		FGBEACD	GDCEABF	GFECDAB
	EDGAFCB		FGBECAD	GDCEAFB	GFECDBA
	EDGFABC		FGEBACD	GDCEFAB	GFEDABC
	EDGFACB		FGEBADC	GDCFEAB	GFEDACB
	EFABDCG		FGEBCAD	GDEACBF	GFEDBAC
	EFABDGC		FGEBDAC	GDEACFB	GFEDBCA
	EFABGDC		FGEDABC	GDECABF	GFEDCAB
	EFADBCG		FGEDBAC	GDECAFB	GFEDCBA
	EFADBGC			GDECFAB	
	EFADGBC			GDEFCAB	
	EFAGBDC			GDFCEAB	
	EFAGDBC			GDFECAB	
	EFBADCG			GEDACBF	
	EFBADGC			GEDACFB	
	EFBAGDC			GEDAFCB	
	EFBGADC			GEDCAFB	
	EFDABGC			GEDCFAB	
	EFDAGBC			GEDFACB	
	EFDGABC			GEDFCAB	
	EFGABDC			GEFDABC	
	EFGADBC			GEFDACB	
	EFGBADC			GEFDCAB	
	EFGDABC			GFBCADE	

Dieses Rangfolgensystem hat die 4 Sektoren ID, IE, IF, und IG. Die konvexe Hülle oder äussere Polygonschalen von K_7 wird also gebildet von den Punkten D,E,F und G. Löschen wir nun die Symbole D,E,F,G aus allen Rangfolgen von $\mathcal{R}_{K_7}$, so erhalten wir das reduzierte System $\mathcal{R}_{K_3}$ mit den Rangfolgen:

ABC	BAC	CAB
ACB	BCA	CBA

Dieses System enthält die drei Sektoren IA, IB und IC, d.h. die Konfiguration K_7 ist aufgebaut aus den zwei ineinandergeschachtelten Polygonschalen D, E, F, G und A, B, C.

Unsere bisherigen Ergebnisse sagen noch nichts aus über die (qualitative) Anordnung der Konfigurationspunkte auf den einzelnen Polygonschalen. Dieser Frage wollen wir im nächsten Abschnitt nachgehen.

3.3 Die qualitative Anordnung der Konfigurationspunkte auf den einzelnen Polygonschalen

Um die qualitative Anordnung der Konfigurationspunkte auf den Polygonschalen aus dem vorgegebenen Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_n}$ ableiten zu können, brauchen wir einige Aussagen über die Geometrie, die dem Konzept der Sektoren zugrundeliegt.

Lemma 3.3.1 Sei K_n eine Konfiguration von n Punkten i.a.L., $\mathcal{R}_{K_n}$ zugehöriges Rangfolgensystem. Dann gilt:

Ist $/A_i$ ein Sektor in $\mathcal{R}_{K_n}$, so liegt für alle j der Punkt A_i in dem von den Mittelsenkrechten A_iA_j gebildeten Halbraum des R^2, in dem der Sektor $/A_i$ nicht liegt.

Beweis: Fall a) A_iA_j ist Grenzgerade des Sektors $/A_i$ (klar).

Fall b) A_iA_j ist nicht Grenzgerade von $/A_i$.

Annahme: A_i liegt im selben Halbraum wie $/A_i$. Dann gibt es keinen Kreis mit Mittelpunkt in $/A_i$, der alle Konfigurationspunkte ausser A_i einschließt, da mindestens der Punkt A_j noch ausserhalb liegt. Dann kann $/A_i$ aber kein Sektor sein. Widerspruch!

q.e.d

Der Punkt A_i liegt also immer auf der 'gegenüberliegenden' Seite des Sektors $/A_i$.

Wir sagen: zwei Sektoren $/A_i$ und $/A_j$ sind benachbart, wenn sie längs eines Mittelsenkrechtenstückes nebeneinander liegen. Zu vermuten ist, daß wenn zwei Sektoren benachbart sind, dann auch die zugehörigen Konfigurationspunkte nebeneinander auf der zugehörigen Polygonschale liegen. Um diese Vermutung zu verifizieren, brauchen wir Aussagen über die Art der Elemente in benachbarten Sektoren:

Lemma 3.3.2 Es seien $/A_1, \ldots, /A_{r_n}$ Sektoren in $\mathcal{R}_{K_n}$, $i,j \in \{1,\ldots,r_n\}$.

Dann gilt:

In $/A_i$ bzw $/A_j$ liegen Gebiete der Form $p = A_iA_j\ldots$ bzw $q = A_jA_i\ldots$ $\Longleftrightarrow$ $/A_i$ und $/A_j$ sind längs A_iA_j benachbart.

Beweis: "$\Longleftarrow$" klar

"$\Longrightarrow$" Annahme: $/A_i$ und $/A_j$ sind nicht längs A_iA_j benachbart.

Es gibt also mindestens einen Sektor $/A_k$ zwischen $/A_i$ und $/A_j$ und p und q sind keine Randgebiete in $/A_i$ bzw $/A_j$.

oBdA: $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ und $p = A_1A_2A_3A_4\ldots A_n$, $q = A_2A_1A_3A_4\ldots A_n$

$/A_1$ und $/A_3$ benachbart längs A_1A_3 impliziert: in $/A_1$ gibt es die Gerade A_2A_3 und damit die Transpositionen

$$/A_1 \ni p \longrightarrow p' = A_1A_3A_2A_4\ldots A_n \longrightarrow p'' = A_3A_1A_2A_4\ldots A_n \in /A_3$$

$/A_2$ und $/A_3$ benachbart längs A_2A_3 impliziert: in $/A_2$ gibt es die Gerade A_1A_3 und damit die Transpositionen:

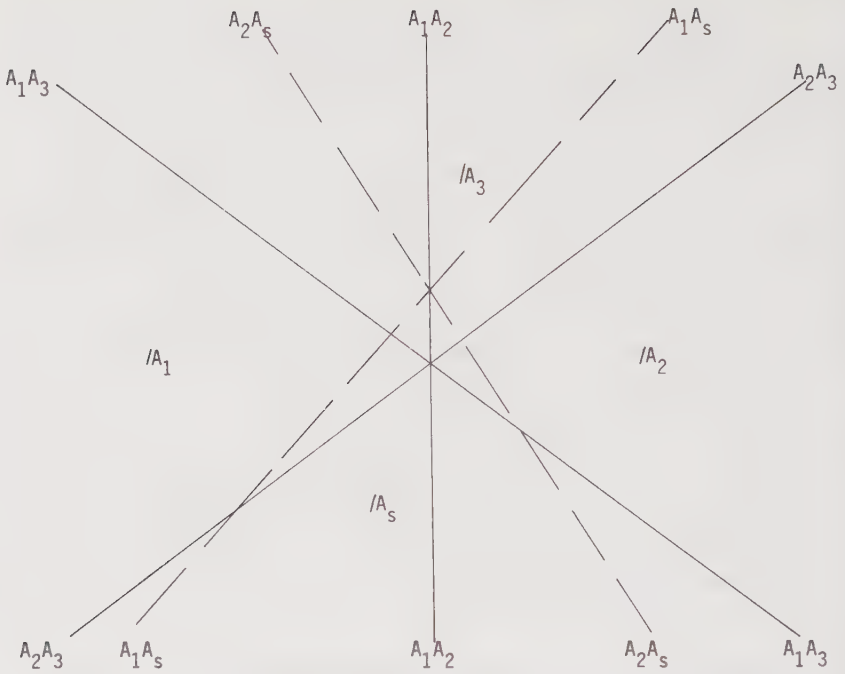
$$A_2 \ni q \longrightarrow q' = A_2A_3A_1A_4\ldots A_n \longrightarrow q'' = A_3A_2A_1A_4\ldots A_n \in /A_3.$$

In $/A_3$ müssen p'' und q'' ineinander überführbar sein, also muß es in $/A_3$ die Gerade A_1A_2 geben. Diese muß so liegen, daß sie weder durch $/A_1$ noch $/A_2$ geht. Dann liegt aber gegenüber $/A_3$ noch mindestens ein Sektor $/A_s$, der die Sektoren $/A_1$ und $/A_2$ trennt.

Die Grenzgeraden A_1A_s und A_2A_s gehen durch den Sektor $/A_3$ (in $/A_3$ liegt nach Konstruktion der dreifache Schnittpunkt E_{12s}) und A_1A_s geht durch $/A_2$, A_2A_s durch $/A_1$. Damit ist es unmöglich (egal wie A_1A_s und A_2A_s jeweils liegen), einen Weg, das ist eine Folge von Transpositionen, die jeweils zwei benachbarte Symbole vertauschen, von $/A_1$ über $/A_3$ nach $/A_2$ zu definieren, der p mit q verbindet. Widerspruch!

q.e.d.

Die geometrische Argumentation dieses Beweises kann man am besten am folgenden Schaubild nachvollziehen:



Definition 3.3.3 Es seien $/A_i$ und $/A_j$ Sektoren in einem Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_n}$. Ein Weg von $/A_i$ nach $/A_j$ ist eine Folge von Transpositionen $\sigma_1,..,\sigma_r$, definiert durch Geraden A_kA_s, so daß für ein $p \in /A_i$ und ein $q \in /A_j$ gilt:

$$\sigma_r(\sigma_{r-1}(\ldots(\sigma_1(p)\ldots) = q$$

Wir wollen im folgenden einen Anordnungszykel von Sektoren definieren als geschlossenen Weg durch die Sektoren der Konfiguration K_n. Dieser Weg soll benachbarte Sektoren miteinander verbinden. Um keinen Sektor auszulassen, muß der Weg möglichst weit aussen verlaufen. Dies erreichen wir, indem wir verlangen, daß der Weg nur durch offene Gebiete geht. Dazu müssen wir zunächst zeigen, daß jeder Sektor offene Gebiete enthält:

Lemma 3.3.4 Jeder Sektor in K_n enthält offene Gebiete.

Beweis: Sei $/A_i$ ein Sektor in $\mathcal{R}_{K_n}$, A_i der zugehörige Punkt auf der konvexen Hülle von K_n. Seien A_j und A_k die zu A_i benachbarten Punkte auf der konvexen Hülle. Nach Definition der konvexen Hülle gibt es eine Gerade G parallel zur Verbindungsstrecke von A_j und A_k, die A_i von den übrigen Konfigurationspunkten trennt. Sei K_r ein Kreis mit Radius r, der A_i ebenfalls von den übrigen Punkten trennt und die Gerade G berührt.
Dann kann man die Gerade lokal durch Kreise mit immer größeren Radien approximieren, die immer noch G im selben Punkt berühren:
durch $\lim_{r\to\infty} K_r$ wird die Gerade G lokal approximiert.
$\lim_{r\to\infty} K_r$ bedeutet aber, daß die Mittelpunkte der Kreise K_r unbeschränkt nach aussen wegdriften. Jeder Mittelpunkt ist ein Punkt im Sektor $/A_i$, also enthält der Sektor $/A_i$ offene Gebiete

q.e.d.

Mit Lemma 3.3.4 sind wir nun in der Lage, den gewünschten Anordnungszykel zu definieren:

Definition 3.3.5 Es seien $/A_1, \ldots, /A_{r_n}$ die Sektoren in $\mathcal{R}_{K_n}$.
Ein Anordnungszykel von benachbarten Sektoren ist ein Weg von $/A_1$ nach $/A_1$, der jeden Sektor $/A_i$ genau einmal durchquert und nur durch offene Gebiete geht.

Es sei $\mathcal{R}_{K_n}$ ein Rangfolgensystem bzgl einer Konfiguration K_n von n Punkten i.a.L. gegeben. Die Sektoren in $\mathcal{R}_{K_n}$ seien $/A_{i_1}, \ldots, /A_{i_{r_n}}$. Nach Lemma 3.3.2 gibt das zweite Symbol in jeder Rangfolge eines Sektor $/A_i$ an, mit welchen anderen Sektoren $/A_i$ benachbart ist. Aus dieser Liste der Form:

$/A_{i_j}$ ist benachbart zu $/A_{i_k}$, $/A_{i_s}$, ...

können wir einen geschlossenen Zykel von benachbarten Sektoren bestimmen, der alle Sektoren erfasst. Es bleibt noch zu zeigen, wie der Zusammenhang zwischen dem Anordnungszykel der Sektoren und der qualitativen Anordnung der Konfigurationspunkte auf der konvexen Hülle ist, und ob es immer einen Anordnungszykel von Sektoren eines Rangfolgensystems $\mathcal{R}_{K_n}$ gibt. Dies wird in den beiden folgenden Sätzen geleistet:

Satz 3.3.6 Es seien $/A_1, \ldots, /A_{r_n}$ die Sektoren in $\mathcal{R}_{K_n}$.

Gibt es dann einen Anordnungszykel von benachbarten Sektoren der Form $/A_{i_1} /A_{i_2} \ldots /A_{i_{r_n}} /A_{i_1}$ bzgl einer bestimmten Orientierung, so gilt für die Extremalpunkte $A_1, \ldots, A_{r_n}$ der konvexen Hülle von K_n:

$A_1, \ldots, A_{r_n}$ sind in der gleichen Orientierung auf einem Zykel angeordnet.

Beweis: oBdA: die Sektoren bilden den Zykel: $/A_1 \ \ldots \ /A_{r_n} /A_1$.

Annahme: Zwischen A_1 und A_2 liegt ein weiterer Extremalpunkt A_j.

$\Longleftrightarrow$ Die Grenzgerade A_1A_2 ist nicht die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke von A_1 und A_2 als Teil der konvexen Hülle.

$/A_1, /A_2$ benachbart impliziert: es gibt Gebiete $p = A_1A_2\ldots$ in $/A_1$ und $q = A_2A_1\ldots$ in $/A_2$ (Lemma 3.3.2). Ist $p = A_iA_j \ldots$, so gibt es für alle $x \in p$ einen Kreis, der alle Punkte ausser A_i und A_j einschließt (nach Definition von p).

Sind also $/A_1$ und $/A_2$ benachbart und liegt zwischen A_1 und A_2 ein weiterer Punkt A_j auf der konvexen Hülle, so kann es keine Kreise mit Mittelpunkt in $p = A_1A_2.. \in /A_1$ bzw $q = A_2A_1\ldots \in /A_2$ geben, die A_j mit einschließen und A_1 und A_2 nicht (Eigenschaft der konvexen Hülle). Widerspruch!

Also ist A_1A_2 die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke von A_1 und A_2 als Teil der konvexen Hülle, d.h. die Punkte A_1 und A_2 liegen auf der konvexen

Hülle nebeneinander.

Nach Lemma 3.3.1 liegen die Punkte A_i zu den Sektoren $/A_i$ immer im Schnitt der Halbräume bzgl A_iA_j, in denen $/A_i$ nicht liegt. Damit ist die Reihenfolge der Punkte A_i auf der konvexen Hülle genau die gleiche wie die der Sektoren im Anordnungszykel.

q.e.d.

Satz 3.3.7 Es seien $/A_1, \ldots, /A_{r_n}$ die Sektoren in $\mathfrak{R}_{K_n}$.

Dann gibt es immer einen Anordnungszykel der Sektoren bzgl des Nachbarschaftskonzeptes:

$$/A_{i_1} \longleftrightarrow /A_{i_2} \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow /A_{i_{r_n}} \longleftrightarrow /A_{i_1}$$

Beweis: Es sei $A_{i_1} \ldots A_{i_r} A_{i_1}$ der Anordnungszykel der Extremalpunkte der konvexen Hülle von K_n. Liegen A_{i_1} und A_{i_2} nebeneinander auf der konvexen Hülle, so gibt es Gebiete der Form $p = A_{i_1} A_{i_2} \ldots$ und $q = A_{i_2} A_{i_1} \ldots$ (es gibt Kreise, die alle Punkte ausser A_{i_1} und A_{i_2} einschließen, deren Mittelpunkte liegen gerade in diesen Gebieten. Es gibt offene Gebiete dieser Art; der Beweis dazu verläuft analog zum Beweis von Lemma 3.3.4). Lemma 3.3.2 impliziert: $/A_{i_1}$ und $/A_{i_2}$ sind benachbart. Macht man diese Argumentation auch für die übrigen Punkte $A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}, A_{i_1}$, so erhält man:
Der Anordnungszykel der Extremalpunkte der konvexen Hülle definiert einen Anordnungszykel der Sektoren.

q.e.d

Bemerkung 3.3.8 Aus der Eindeutigkeit des Zykels der Extremalpunkte der konvexen Hülle von K_n folgt auch die Eindeutigkeit des Anordnungszykels der Sektoren!

Die wichtigsten Ergebnisse unserer bisherigen Untersuchungen (Satz3.2.1, Lemma 3.3.2, Satz 3.3.6 und Satz 3.3.7) ergeben eine Strategie zunächst zur Bestimmung der qualitativen Anordnung der Konfigurationspunkte auf der konvexen Hülle von K_n, die wir im folgenden Korollar noch einmal zusammenstellen wollen:

Korollar 3.3.9 Es seien $/A_1,\ldots,/A_{r_n}$ die Sektoren in einem vorgegebenen vollständigen Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_n}$.

Dann gilt:

$A_1,\ldots,A_{r_n}$ bilden die konvexe Hülle von K_n;

das zweite Symbol in jeder Rangfolge eines Sektors $/A_i$ gibt an, mit welchen anderen Sektoren $/A_i$ benachbart ist, wenn dieses zweite Symbol einen Sektor definiert;

es gibt immer einen Anordnungszykel der Sektoren;

die Punkte $A_1,..,A_{r_n}$ haben auf der konvexen Hülle die gleiche Reihenfolge wie die Sektoren in ihrem Anordnungszykel.

Diese Strategie können wir ohne Komplikationen auf alle im Abschnitt 3.2 ermittelten Polygonschalen der Konfiguration K_n ausdehnen und erhalten schließlich die qualitative Anordnung aller Konfigurationspunkte auf den verschiedenen Polygonschalen von K_n.

Diesen Prozeß wollen wir an einem Beispiel verdeutlichen:

Beispiel 3.3.10 Gegeben sei das Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_7}$ bzgl einer Konfiguration von 7 Punkten i.a.L. (Beispiel 3.2.6 auf Seite 76).

In diesem Rangfolgensystem gibt es zwei Polygonschalen mit den jeweiligen Sektoren /D, /E, /F, /G und /A, /B, /C. Bezüglich der äusseren Sektoren erhalten wir mit Lemma 3.3.2 aus $\mathcal{R}_{K_7}$ die folgende Liste der Nachbarschaften:

|D benachbart zu |E, |G

|E benachbart zu |D, |F, |G

|F benachbart zu |E, |G

|G benachbart zu |D, |E, |F.

Aus dieser Liste läßt sich nur der Zykel $|D \longleftrightarrow |E \longleftrightarrow |F \longleftrightarrow |G \longleftrightarrow |D$ ableiten, d.h. für die qualitative Anordnung der Punkte gilt nach Satz3.3.6: Die Punkte D,E,F,G liegen auf der äusseren Polygonschale wie folgt nebeneinander: $D \longleftrightarrow E \longleftrightarrow F \longleftrightarrow G \longleftrightarrow D$

Aus dem reduzierten Rangfolgensystem, das nur noch Rangfolgen bzgl der Punkte A,B und C enthält, erhalten wir das Nachbarschaftskonzept:

/A benachbart zu |B, |C

|B benachbart zu /A, |C

|C benachbart zu /A, |B

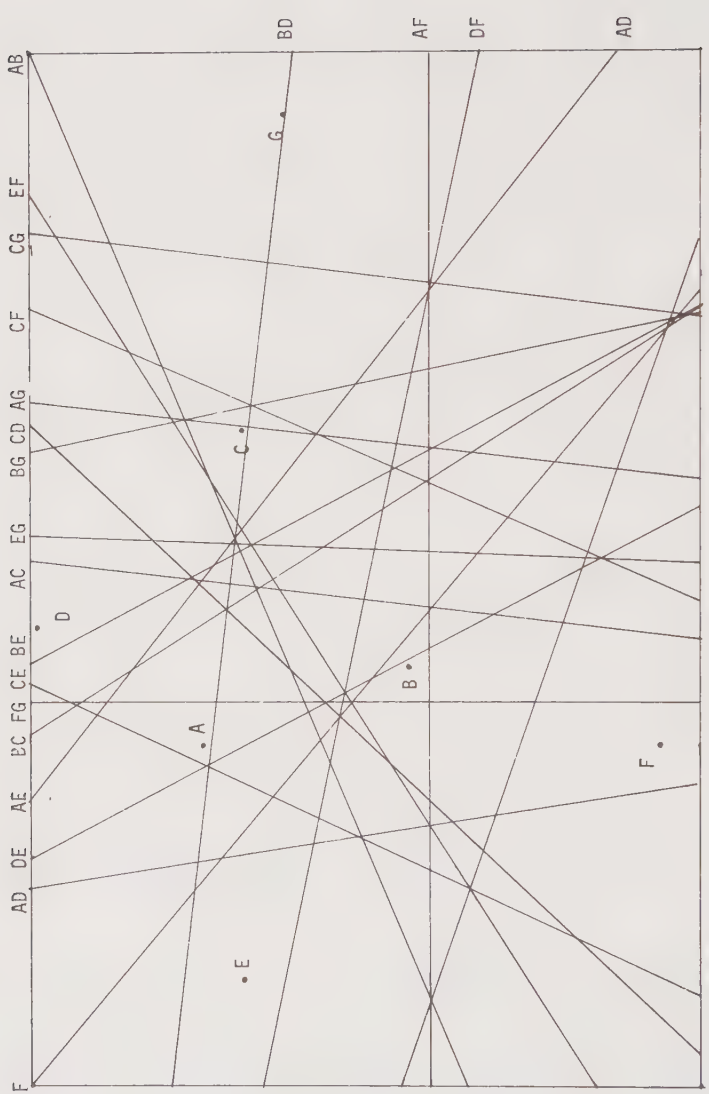
und daraus den Zykel der Sektoren $/A \longleftrightarrow |B \longleftrightarrow |C \longleftrightarrow /A$

Das ergibt die qualitative Anordnung der Punkte $A \longleftrightarrow B \longleftrightarrow C \longleftrightarrow A$.

Die sieben Punkte der Konfiguration liegen also auf zwei ineinandergeschachtelten Polygonschalen der Form:

Zum Vergleich geben wir auf der folgenden Seite eine geometrische Realisation von $\mathcal{R}_{K_7}$ mit der Konfiguration der 7 Punkte und der Gebietsaufteilung.

Über diese qualitative Beschreibung hinaus, etwa in Richtung einer quantitativen Umsetzung, können wir im derzeitigen Stadium unserer Untersuchungen noch keine Angaben machen. Wir wissen weder die quantitative Lage der Punkte auf den einzelnen Schalen noch die Lage der Punkte der verschiedenen Schalen zueinander. Dies soll in den beiden folgenden Abschnitten besprochen werden.


CF
AD
DE
AE
BC
FG
CE
BE
AC
EG
BG
CD
AG
CF
CG
EF
AB
BD
AF
DF
AD
A
B
C
D
E
F
G

3.4 Die abhängige Orientierung der einzelnen Polygonschalen

Wir werden in diesem Abschnitt eine Beziehung herstellen zwischen den ineinandergeschachtelten Polygonschalen. Bis jetzt haben wir die qualitative Anordnung der Konfigurationspunkte auf jeder einzelnen Schale aus einem vorgegebenem Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_n}$ hergeleitet. Dabei ist jedoch noch völlig offen, welche Orientierung der einzelnen Schalen zu wählen ist. Setzt man etwa im Beispiel 3.3.1o des vorigen Abschnitts die Orientierung des äusseren Zykels wie folgt fest:

$$D \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow D$$

so kann man den nächst-inneren Zykel mit der Reihenfolge

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$$

oder

$$A \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow A$$

einbetten. Bei mehr als zwei Polygonschalen hat man damit viele Möglichkeiten, die Konfiguration qualitativ aufzubauen. Andererseits ist zu vermuten, daß diese verschiedenen Möglichkeiten auch verschiedene Rangfolgensysteme generieren. Es erhebt sich also die Frage, ob bei Festlegung der Orientierung der äusseren Schale die Orientierungen der inneren Schalen eindeutig und in Abhängigkeit von der äusseren Orientierung aus dem Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_n}$ ableitbar sind. Dieser Frage gehen wir jetzt nach.

Sei $\mathcal{R}_{K_n}$ mit den r_n Sektoren $/A_{i_n}, \ldots, /A_{i_{r_n}}$ gegeben.
Die Sektoren, die entstehen, wenn man aus allen $p \in \mathcal{R}_{K_n}$ die Symbole A_{i_j} streicht, seien: $/B_{j_1}, \ldots, /B_{j_{r_{n1}}}$, $n_1 = n - r_n$.
OBdA: die Anordnungszykel seien:

$$\rho_1: \quad /A_{i_1} \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow /A_{i_{r_n}} \longleftrightarrow /A_{i_1}$$

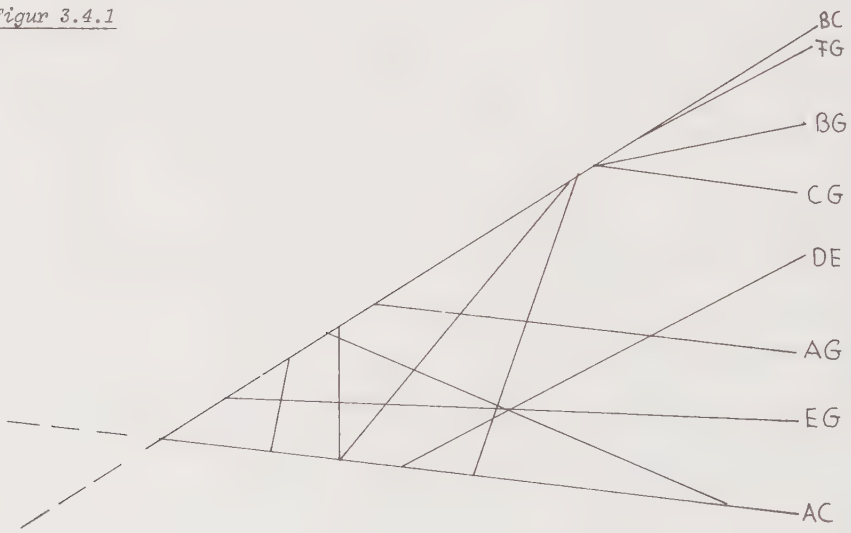
und

$$\rho_2: \quad /B_{j_1} \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow /B_{j_{r_{n_1}}} \longleftrightarrow /B_{j_1}$$

Die Beziehung zwischen den Sektoren $/A_i$ und $|B_j$ besteht darin, daß ausgehend von einer Konfiguration mit n_1 Punkten und r_{n_1} Sektoren $|B_{j_1}, \ldots, |B_{j_{r_{n_1}}}$ durch Hinzunahme weiterer Punkte Sektoren $/A_i$ entstehen, die die $|B_j$ überdecken. Jedes Rangfolgengebiet $p \in /A_i$ ist entstanden aus einem Gebiet $q_j \in |B_j$ durch zerteilung von q_j durch Mittelsenkrechten bzgl der Punkte $A_1, \ldots, A_{n_1}$ und $A_{n_1+1}, \ldots, A_n$, d.h. es gilt: $p \in q_j$ und $/A_i = \bigcup_{t=1}^{\ell} p_{i_t} \subset \bigcup_{s} |B_{j_s}$. Ausgehend von einer Konfiguration K_{n_1} mit zugehöriger Gebietsaufteilung des R^2 bedeutet also die Hinzunahme weiterer Punkte zu K_{n_1} nichts anderes als die Verfeinerung der Zerlegung des R^2 auf der Grundlage der durch K_{n_1} vorgegebenen Gebietsaufteilung

Zur Verdeutlichung des Sachverhalts geben wir in Figur 3.4.1 die Zerlegung des Gebietes ACB der Konfiguration der Punkte A,B,C des Beispiels 3.3.1o im vorigen Abschnitt durch Hinzunahme der Punkte D, E, F, G und der dadurch induzierten neuen Mittelsenkrechten

Figur 3.4.1



Das Gebiet ACB besteht nun aus den Gebieten:

DACEGBF	EDACBFG	GDEACBF
DACGEBF	EDACBGF	GDEACFB
DAECGBF	EDACGBF	GEDACBF
DAEGCBF	EDAGCBF	GEDACFB
DAGCEBF	EDAGCFB	GEDAFCB
DAGECBF	EDAGFCB	GEDFACB
DEACBGF	EDGACBF	GEFDACB
DEACGBF	EDGACFB	GFEDACB
DEAGCBF	EDGAFCB	
DEGACBF	EDGFACB	
DGACEBF	EGDACBF	
DGAECBF	EGDACFB	
DGEACBF	EGDAFCB	
	EGDFACB	
	EGFDACB	

Es sei $\vec{\rho}_1$ der Anordnungszykel der $/A_i$ mit der Orientierung '$\longrightarrow$'.
Der Anordnungszykel war definiert als ein Weg durch nur offene Gebiete benachbarter Sektoren. Jedes dieser Gebiete ist nach dem oben gesagten enthalten in einem offenen Gebiet eines Sektors $|B_j$ (durch Vergröberung der Zerlegung kann man nicht aus einem offenen ein abgeschlossenes Gebiet erhalten). Daraus folgt:

$\vec{\rho}_1$ eingeschränkt auf die Schnittmengen $/A_i^* = /A_i \cap (|B_{j_1} \cup \ldots \cup |B_{j_{r_{n_1}}})$ ist nichts anderes als der orientierte Zykel $\vec{\rho}_2$.

Damit haben wir:

Satz 3.4.2 Die Festlegung einer Orientierung des äusseren Zykels

$$\vec{\rho}_1 : \quad A_{i_1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_{i_{r_n}} \longrightarrow A_{i_1}$$

induziert in eindeutiger Weise die Orientierung des nächst-inneren Zykels:

$$\vec{\rho}_2 : \quad B_{j_1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow B_{j_{r_{n_1}}} \longrightarrow B_{j_1}$$

Dieser Satz hat jedoch noch keine praktischen Konsequenzen, er definiert nur den Zusammenhang zwischen den einzelnen Polygonschalen. Wir wollen daher im folgenden versuchen, eine praktische Herleitung der Orientierungen der inneren Zykel aus der des äusseren Zykels zu finden. Da die explizite Angabe der offenen Gebiete, durch die der äussere Zykel definiert ist, bisher nicht notwendig war, wollen wir auch hier allgemeinere Prinzipien zur Herleitung der induzierten Orientierungen angeben.

Es sei $/A_{i_1} \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow /A_{i_{r_n}} \longleftrightarrow /A_{i_1}$ der äussere Zykel eines Rangfolgensystems, und $|B_{j_1} \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow |B_{j_{r_{n1}}} \longleftrightarrow |B_{j_1}$ der nächst-innere Zykel.

Sei '$\longrightarrow$' im äusseren Zykel festgelegt. Betrachten wir die Obergänge $/A_{i_r} \longrightarrow /A_{i_s}$. Nach Lemma 3.3.2 gilt: $/A_{i_r}$ und $/A_{i_s}$ sind benachbart genau dann, wenn in $/A_{i_r}$ Gebiete der Form $A_{i_r} A_{i_s} \ldots$ und in $/A_{i_s}$ Gebiete der Form $A_{i_s} A_{i_r} \ldots$ liegen. Bestimme alle Rangfolgen in $/A_{i_r}$ der Form $A_{i_r} A_{i_s} \ldots$ und alle Rangfolgen in $/A_{i_s}$ der Form $A_{i_s} A_{i_r} \ldots$.
Durch Weglassen der Symbole $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{r_n}}$ in diesen Rangfolgen erhält man die nächst-inneren Sektoren $|B_j$, in denen der Obergang $/A_{i_r} \longrightarrow /A_{i_s}$ liegt.
Macht man diesen Prozeß für alle einzelnen Übergänge im äusseren Zykel, so erhält amn eine Liste von inneren Sektoren bzgl der Obergänge im äusseren Zykel. Ein Vergleich dieser Liste mit dem (vorher bestimmten) nächst-inneren Zykel ergibt dann die Orientierung dieses Zykels, induziert durch die Orientireung des äusseren Zykels. Aus Satz 3.4.2 folgt, daß die auf diese Art gewonnene Orientierung die einzig mögliche für den inneren Zykel ist. Alle weiteren inneren Zykel werden nunsukzessive nach dem gleichen Prinzip orientiert.

Beispiel 3.4.3 Betrachten wir wieder das Beispiel aus Abschnitt I.3.3

äusserer Zykel: $\mathfrak{D} \longleftrightarrow \mathfrak{E} \longleftrightarrow \mathfrak{F} \longleftrightarrow \mathfrak{G} \longleftrightarrow \mathfrak{D}$

innerer Zykel $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{C} \longleftrightarrow \mathfrak{A}$

Sei '$\longrightarrow$' im äusseren Zykel festgelegt.

a) $\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{E}$: alle Rangfolgen der Form DE.. liegen in $\mathfrak{A}$

b) $\mathfrak{E} \longrightarrow \mathfrak{F}$: alle Rangfolgen der Form EF.. liegen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

c) $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$: alle Rangfolgen der Form FG.. liegen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

d) $\mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D}$: alle Rangfolgen der Form GD.. liegen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$

a) $\Rightarrow$ der Obergang $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{E}$ findet in $\mathfrak{A}$ statt

b) $\Rightarrow$ der Obergang $\mathfrak{E} \longrightarrow \mathfrak{F}$ findet in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ statt

c) $\Rightarrow$ der Obergang $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ findet in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ statt

d) $\Rightarrow$ der Obergang $\mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D}$ findet in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ statt.

Interessant ist für den Obergang $\mathfrak{A}_{i_r} \longrightarrow \mathfrak{A}_{i_s}$, in welchem neuen Sektor dieser Obergang stattfindet.

In unserem Fall erhalten wir also:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{D} & \longrightarrow & \mathfrak{E} & \longrightarrow & \mathfrak{F} & \longrightarrow & \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D} \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ \mathfrak{A} & & \mathfrak{B} & & \mathfrak{B} & & \mathfrak{C} \end{array}$$

und damit die eindeutig bestimmte Orientierung:

$$\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

des inneren Zykels aus der Orientierung des äusseren Zykels.

Bemerkung 3.4.4

i) Daß bzgl des Obergangs $/A_{i_r} \longrightarrow /A_{i_s}$ immer nur neue nächst-innere Sektoren interessant sind, hat folgenden Hintergrund:

In der Aussage " $/A_{i_r} \longrightarrow /A_{i_s}$ findet in $|B_{j_1}$ und $|B_{j_2}$ statt "
steckt die Information, daß dieser Obergang in den benachbarten Sektoren $|B_{j_1}$ und $|B_{j_2}$ liegt. Ist also im vorhergehenden Obergang $/A_{i_{r-1}} \longrightarrow /A_{i_r}$ der Sektor $|B_{j_1}$ bereits festgelegt, so kann man folgern, daß durch den Obergang $/A_{i_r} \longrightarrow /A_{i_s}$ auf der Ebene der nächst-inneren Sektoren der Obergang $|B_{j_1} \longrightarrow |B_{j_2}$ erfolgen wird, bevor man zum Obergang $/A_{i_s} \longrightarrow /A_{i_{s+1}}$ kommt.

ii) Bei größeren Zykeln und insbesondere in den Fällen, wo der nächst-innere Zykel größer ist als der äussere Zykel, muß man auch den (vorher bestimmten) nächst-inneren Zykel direkt mit heranziehen und aus dem Vergleich der Informationen, die einerseits in der Liste bzgl der Obergänge und andererseits im Anordnungszykel stecken, die Orientierung bestimmen.

iii) Dieses Verfahren der induzierten Zykel-Orientierung funktioniert nur in den Fällen, wo in der Liste der nächst-inneren Sektoren bzgl der Obergänge im äusseren Zykel auch alle Sektoren $|B_{j_1}, \ldots, |B_{j_{r_{n_1}}}$ auftauchen. Fehlen in dieser Liste gewisse $|B_j$, so kann die Information möglicherweise nicht ausreichen, eine eindeutige Richtung herzuleiten. Dies wird insbesondere dann der Fall sein, wenn man ein unvollständiges Rangfolgensystem vorliegen hat, was in der Praxis die Regel ist.

Im folgenden geben wir noch ein Beispiel, das die bisher erarbeitete Strategie zur Bestimmung der qualitativen Konfiguration von n Punkten aus einem vorgegebenen vollständigen Rangfolgensystem darlegen soll.

Beispiel 3.4.5 Gegeben sei das folgende Rangfolgensystem $\mathfrak{R}_{K_7}$ einer Konfiguration von 7 Punkten:

ABCEDFG	AEDBFCG	BACEFGD	BFGEACD	CABDEGF	CBGFDAE
ABCEFDG	AEDBFGC	BACFEGD	BFGEADC	CABDGEF	CBGFDEA
ABCEFGD		BAECFDG	BFGECAD	CABDGFE	CBGFEAD
ABCEDFG		BAECFGD	BFGECDA	CABEDFG	CBGFEDA
ABECFDG		BAEDFGC	BFGEDAC	CABEDGF	CDAGEFB
ABECFGD		BAEFCDG	BFGEDCA	CABEFDG	CDAGFEB
ABEDCFG		BAEFCGD		CABEFGD	CDGAFEB
ABEDFCG		BAEFDCG		CABEGDF	CDGFAEB
ABEDFGC		BAEFDGC		CABEGFD	CDGFEAB
ABEFCDG		BAEFGCD		CABFEGD	CGABFDE
ABEFDCG		BAEFGDC		CABFGED	CGADFBE
ABEFDGC		BAFCEGD		CABGDEF	CGADFEB
ACBDEFG		BAFECGD		CABGDFE	CGAFBDE
ACBDEGF		BAFEGCD		CABGEDF	CGAFDBE
ACBEDFG		BCAEFGD		CABGEFD	CGBAFDE
ACBEDGF		BCAFEGD		CABGFDE	CGBFADE
ACBEFDG		BCAFGED		CABGFED	CGBFDAE
ACBEFGD		BCFAEGD		CADBEGF	CGBFDEA
ACDBEFG		BCFAGED		CADBGEF	CGBFEDA
ACDBEGF		BCFEAGD		CADBGFE	CGDAFBE
ACDEBFG		BCFEGAD		CADEBGF	CGDAFEB
ACDEBGF		BCFGAED		CADEGBF	CGDFABE
ACDEGBF		BCFGEAD		CADEGFB	CGDFAEB
ACDEGFB		BCFGEDA		CADGBEF	CGDFEAB
ADCEBFG		BCGFEDA		CADGBFE	CGFABDE
ADCEBGF		BEAFGCD		CADGEBF	CGFADBE
ADCEGBF		BEAFGDC		CADGEFB	CGFBADE
ADCEGFB		BEFAGCD		CADGFBE	CGFBDAE
ADEBCFG		BEFAGDC		CADGFEB	CGFBDEA
ADEBFCG		BEFGACD		CAGBDFE	CGFBEDA
ADEBFGC		BEFGADC		CAGBFDE	CGFDABE
ADECBFG		BFACEGD		CAGDBFE	CGFDAEB
ADECBGF		BFAECGD		CAGDFBE	CGFDBAE
ADECFBG		BFAEGCD		CAGDFEB	CGFDBEA
ADECFGB		BFCAEGD		CAGFBDE	CGFDEAB
ADECGBF		BFCEAGD		CAGFDBE	CGFDEBA
ADECGFB		BFCEGAD		CBAEFGD	
ADEFBCG		BFCGEAD		CBAFEGD	
ADEFBGC		BFCGEDA		CBAFGED	
ADEFCBG		BFEACGD		CBAGFDE	
ADEFCGB		BFEAGCD		CBAGFED	
ADEFGBC		BFECAGD		CBFAGED	
ADEFGCB		BFECGAD		CBFGAED	
ADEGCFB		BFEGACD		CBFGEAD	
ADEGFCB		BFEGADC		CBFGEDA	
AEBDCFG		BFEGCAD		CBGAFDE	
AEBDFCG		BFEGDAC		CBGAFED	
AEBDFGC		BFGCEAD		CBGFADE	
AEDBCFG		BFGCEDA		CBGFAED	

Dieses System hat die (äusseren) Sektoren /A, |B, ℂ mit dem Nachbarschafts-konzept:

/A benachbart zu |B und ℂ

|B benachbart zu /A und ℂ

ℂ benachbart zu /A und |B

Wir erhalten also den äusseren Zykel

$$/A \longleftrightarrow |B \longleftrightarrow \mathbb{C} \longleftrightarrow /A$$

Das reduzierte Rangfolgensystem bzgl der Punkte D, E, F, G hat die Rangfolgen:

DEFG	EDFG	FEGD	GDEF
DEGF	EDGF	FGED	GDFE
DGEF	EFDG		GEDF
DGFE	EFGD		GEFD
	EGDF		GFDE
	EGFD		GFED

Die nächst-inneren Sektoren sind also |D, |E, |F und 𝔾 mit den Nachbarschaften:

|D benachbart zu |E und 𝔾

|E benachbart zu |D, |F und 𝔾

|F benachbart zu |E und 𝔾

𝔾 benachbart zu |D, |E und |F

Dies ergibt den inneren Zykel:

$$|D \longleftrightarrow |E \longleftrightarrow |F \longleftrightarrow \mathbb{G}$$

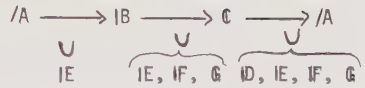
Es sei '$\longrightarrow$' im äusseren Zykel festgelegt. Aus der Rangfolgenliste entnehmen wir die folgenden Beziehungen:

a) /A $\longrightarrow$ |B: alle Rangfolgen der Form AB.. liegen in |E

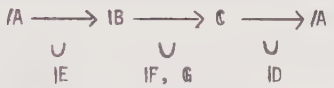
b) |B $\longrightarrow$ ℂ: alle Rangfolgen der Form BC.. liegen in |E, |F, 𝔾

c) ℂ $\longrightarrow$ /A: alle Rangfolgen der Form CA.. liegen in |D, |E, |F, 𝔾

Das ergibt das folgende Bild:



Schränken wir uns wieder auf nur neue Sektoren ein, so erhalten wir:



Da im inneren Zykel der Obergang IE ⟶ G nicht möglich ist, resultiert: Die Orientierung des inneren Zykel, induziert von der des äusseren Zykels, ist:

IE ⟶ IF ⟶ G ⟶ ID ⟶ IE

3.5 Geometrische Beschränkungen der quantitativen Lage der Objektpunkte

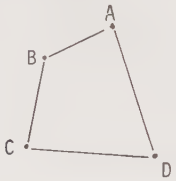
Wir konnten bisher den qualitativen Aufbau einer Konfiguration K_n aus einem vorgegebenen vollständigen Rangfolgensystem $\mathfrak{R}_{K_n}$ herleiten. Für die Praxis interessant ist nun die Frage ob wir der qualitativen Anordnung der Punkte eine quantitative Lagebestimmung aus dem vorgegebenen Rangfolgensystem hinzufügen können. Bereits im eindimensionalen Fall haben wir gesehen, daß eine feste qualitative Anordnung der Punkte (J-Skala) mehrere verschiedene Rangfolgensysteme (I-Skalen-System) generiert. Das gleiche Problem stellt sich auch im zweidimensionalen Fall:

Ist beispielsweise die qualitative Anordnung von vier Punkten A,B,C,D aus einem vorgegebenen vollständigen Rangfolgensystem wie folgt ermittelt:

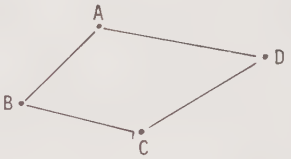
$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow A$$

so führt die quantitative Umsetzung auf verschiedene unregelmäßige Polygonzüge auch zu verschiedenen Rangfolgensystemen:

a)



b)



Die Konfiguration a) generiert ein anderes System als die Konfiguration b). Die Rangfolgen selbst kann man auch nicht direkt zur quantitativen Lagebestimmung heranziehen, denn die Folge $A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ definiert durch $d(x,A_{i_1}) > \ldots > d(x,A_{i_n})$ sagt nur etwas aus über die Reihenfolge der Abstände der Objektpunkte zu gewissen Subjektpunkten, nicht aber über die Abstände der Objektpunkte untereinander. Andererseits sind in der Gesamtheit aller Rangfolgen eines vollständigen Systems $\mathfrak{R}_{K_n}$ geometrische Informationen enthalten: Sind beispielsweise $A_1,\ldots,A_{r_n}$ die äusseren Punkte von K_n und $A_{r_{n+1}},\ldots,A_n$ die nächst-inneren, so kann man $\mathfrak{R}_{K_n}$ entnehmen, in welche weiteren Gebiete die Gebiete der Konfiguration der Punkte $A_{r_{n+1}},\ldots,A_n$ unterteilt werden, wenn man die Punkte $A_1,\ldots,A_{r_n}$ hinzunimmt (vgl Figur 3.4.1 auf Seite 88). Die Existenz gerade dieser neuen Gebiete setzt voraus, daß die neuen Punkte und ihre Mittelsenkrechten ganz bestimmte Lagen in der ursprünglichen Konfiguration einnehmen. Es muß also geometrische Beschränkungen geben, die bereits im vorgegebenen Rangfolgensystem verborgen sind.

J.A. Davidson, [4], hat 1972 notwendige und hinreichende Kriterien zur Bestimmung der Lage der Objektpunkte hergeleitet, die wir im folgenden darlegen wollen. Davidson's Kriterien wurden für Objektkonfigurationen in einem beliebig-dimensionalen Raum bestimmt, wir beschränken uns auf den zweidimensionalen Fall. Die grundlegende Idee im Ansatz von J.A. Davidson ist, das vorgegebene vollständige Rangfolgensystem aus dem Blickwinkel der Schnittpunkte der Mittelsenkrechten, den von ihm so benannten *Eckpunkten* der Konfiguration, zu betrachten. Da die geometrischen Argumente, wie das immer bei geometrischen Untersuchungen der Fall ist, relativ kompliziert sind, müssen wir ausführlich darauf eingehen.

Definition 3.5.1 Sei K_n eine Konfiguration von n Punkten i.a.L. im R^2,
π eine formale Partition (Zerlegung) von K_n in disjunkte Teilmengen T_i. Dann bezeichne
s_π die Anzahl der Teilmengen von π
m_i die Anzahl der Teilmengen T_i mit i Objektpunkten
$1(\pi) = \{ x \in R^2 \mid$ x ist äquidistant zu allen Objektpunkten derselben Teilmenge $T_i \}$

Ist zum Beispiel π die Partition (A_1,A_2A_3) (A_4) (A_5) einer Konfiguration von fünf Objektpunkten, so ist $s_\pi = 3$, $m_1 = 2$, $m_2 = o$, $m_3 = 1$ und $1(\pi)$ der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten A_1A_2, A_1A_3 und A_2A_3, also der Eckpunkt E_{123}. Es gilt der folgende Satz:

Satz 3.5.2 Sei π irdendeine Partition einer Konfiguration von n Punkten i.a.L. . Dann gilt:

i) $1(\pi)$ ist eine Mittelsenkrechte $\Longleftrightarrow s_\pi = n-1$

ii) $1(\pi)$ ist ein Eckpunkt $\Longleftrightarrow s_\pi = n-2$

Wir haben bereits in Kapitel 2 Abschnitt 2.2 gesehen, daß zu einem 2- oder 3-fachen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten einer Konfiguration K_n Permutationsgruppen gehören, die die Gebiete, die in diesen Eckpunkten zusammenstoßen, generieren (Satz 2.2.5). Die Anzahl aller möglichen Permutationen der n Objekte *innerhalb* aller Teilmengen von π ist:

$$M(\pi) = \prod_{i=1}^{n} (i!)^{m_i}$$

Definition 3.5.3 π^* ist eine Geordnete Partition zu π, falls die Teilmengen T_i in irgendeiner Weise geordnet sind.

Sei $P(\pi^*)$ die Menge aller Permutationen von π^*

$P(\pi^*)$ heißt vollständig $\Longleftrightarrow |P(\pi^*)| = M(\pi^*)$

Ist $\pi^* = \pi = (A_1A_2A_3)\ (A_4)\ (A_5)$, so besteht die vollständige Menge $P(\pi^*)$ aus den sechs Permutationen der 3 Objektpunkte A_1, A_2, A_3:

$P(\pi^*) = \{A_1A_2A_3A_4A_5,\ A_2A_1A_3A_4A_5,\ A_1A_3A_2A_4A_5,\ A_3A_2A_1A_4A_5,\ A_2A_3A_1A_4A_5,\ A_3A_1A_2A_4A_5\}$

Mit Hilfe dieser Permutationsgruppen bzgl einer Partition von K_n können wir nun das vollständige Rangfolgensystem $\mathfrak{R}_{K_n}$ zu K_n zerlegen:

Satz 3.5.4 Sei $\mathfrak{R}_{K_n}$ ein vollständiges System von Rangfolgen bzgl einer Konfiguration K_n von n Punkten i.a.L.. Sei π_i irgendeine Partition von K_n mit n-2 Teilmengen. Dann gilt:

i) Es gibt genau eine geordnete Partition π_i^* zu π_i, für die die vollständige Menge von Permutationen, $P(\pi_i^*)$, enthalten ist in $\mathfrak{R}_{K_n}$.

ii) Es gibt keine vollständigen Permutationsmengen von geordneten Partitionen mit weniger als n-2 Teilmengen in $\mathfrak{R}_{K_n}$.

iii) Es gibt eine eindeutige Zerlegung von $\mathcal{R}_{K_n}$ der Form:

$$\mathcal{R}_{K_n} = \bigcup_{i=1}^{e_n} P(\pi_i^*)$$

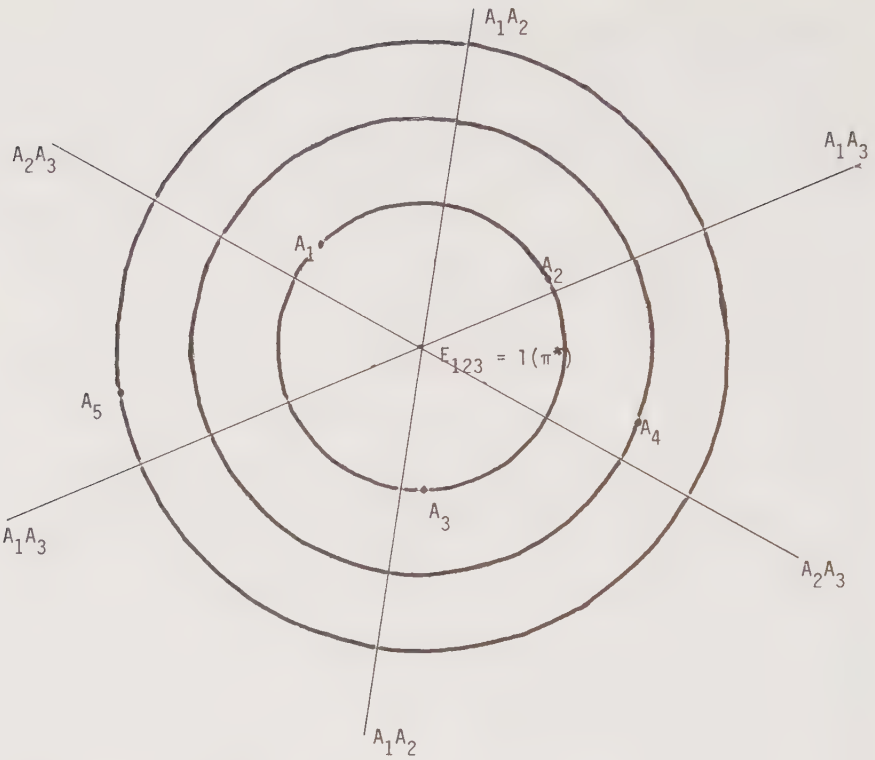
wo e_n die Anzahl aller Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von K_n bezeichnet.

Diese Zerlegung von $\mathcal{R}_{K_n}$ liefert ein notwendiges Kriterium dafür, daß ein Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_n}$ eine zweidimensionale Darstellung erlaubt:

Satz 3.5.5 Sei $\mathcal{R}_{K_n}$ gegeben. Notwendige Bedingung für die Existenz einer zweidimensionalen Konfiguration K_n von n Punkten i.a.L. zu $\mathcal{R}_{K_n}$ ist: $\mathcal{R}_{K_n}$ enthält keine vollständigen Permutationsmengen bzgl Partitionen mit weniger als n-2 Teilmengen, und höchstens eine vollständige Permutationsmenge für jede geordnete Partition mit genau n-2 Teilmengen.

Die bisherigen Oberlegungen erlauben nun ein erstes notwendiges und hinreichendes Kriterium zur Bestimmung der quantitativen Lage der Objektpunkte:

Kriterium 1 Ist $l(\pi^*)$ ein Eckpunkt einer Konfiguration K_n von n Punkten i.a.L. im R^2, so sind die notwendigen und hinreichenden geometrischenBeschränkungen zur Bestimmung der vollständigen Menge der Permutationen, $P(\pi^*)$, die zu den Gebieten in einer Umgebung von $l(\pi^*)$ gehören, Kreise zentriert in $l(\pi^*)$, die durch Objektpunkte gehen.
Ist $\pi^* = T_1 T_2 \ldots T_t$ die Zerlegung, so kommt T_1 vor T_2 in π^* genau dann, wenn die Punkte von T_1 ausserhalb des Kreises, zentriert in $l(\pi^*)$, liegen, der durch die Punkte von T_2 geht.
A und B liegen auf dem Kreis genau dann, wenn sie zur gleichen Teilmenge von π^* gehören.



$\pi^* = (A_5)\ (A_4)\ (A_1A_2A_3)$

Verdeutlichen wir den Sachverhalt an einem Beispiel:

Beispiel 3.5.6 Im Fall von n = 4 Objektpunkten enthält die Konfiguration K_4 $\binom{4}{3} + 3\binom{4}{4} = 7$ Eckpunkte, es gibt also die folgenden 7 Partitionen mit n-2 = 2 Teilmengen:

$\pi_1 = (A,B,C)\ (D)$; $\pi_2 = (A,B,D)\ (C)$; $\pi_3 = (A,C,D)\ (B)$; $\pi_4 = (B,C,D)\ (A)$;

$\pi_5 = (A,B)\ (C,D)$; $\pi_6 = (A,C)\ (B,D)$; $\pi_7 = (A,D)\ (B,C)$

Betrachten wir das Rangfolgensystem des Beispiels 3.1.3 auf Seite 71:

ABCD	BACB	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BDAC	CDAB	DBAC
ACDB			DBCA
ADBC			DCAB
ADCB			DCBA

Dann ist:

die geordnete Partition zu π_1: π_1^*: (D),(A,B,C)

" " " " π_2: π_2^*: (A,B,D),(C)

" " " " π_3: π_3^*: (A,C,D),(B)

" " " " π_4: π_4^*: (A),(B,C,D)

" " " " π_5: π_5^*: (A,B),(C,D)

" " " " π_6: π_6^*: (A,C),(B,D)

" " " " π_7: π_7^*: (A,D),(B,C)

Zeichnen wir also die Punkte A,B und C beliebig in den R^2, so erhalten wir aus Kriterium 1 die folgenden geometrischen Beschränkungen für die Lage des Punktes D:

π_1^* : D liegt ausserhalb des Kreises durch A,B,C mit Mittelpunkt (MP) E_{ABC}

π_2^* : D liegt auf dem Kreis durch A,B,D mit MP E_{ABD}

π_3^* : D liegt auf dem Kreis durch A,C,D mit MP E_{ACD}

π_4^* : D liegt auf dem Kreis durch B,C,D mit MP E_{BCD}

π_5^* : D liegt innerhalb des Kreises durch A,B mit MP $E_{AB,CD}$

π_6^* : D liegt innerhalb des Kreises durch A,C mit MP $E_{AC,BD}$

π_7^* : D liegt ausserhalb des Kreises durch B,C mit MP $E_{AD,BC}$

Wir sehen: direkt verwertbar ist nur die erste Beschränkung, die übrigen, die aus den geordneten Partitionen $\pi_2^*, \ldots, \pi_7^*$ resultieren, sind redundant!

Zur Herleitung eines besser verwendbaren Kriteriums greift Davidson auf die Tatsache zurück, daß es in einem $\mathfrak{R}_{K_n}$ offene Gebiete gibt, also Rangfolgen, zu denen in $\mathfrak{R}_{K_n}$ inverse Rangfolgen existieren.

Satz 3.5.7

Sei $\mathfrak{R}^o_{K_n}$ die Teilmenge von $\mathfrak{R}_{K_n}$, die aus zueinander inversen Rangfolgen besteht. Sei π eine Partition von K_n mit n-1 Teilmengen.

Dann gilt:

i) Es gibt genau ein Paar von geordneten Partitionen π^1 und π^2 von π, die zueinander invers sind und für die $P(\pi^1)$ und $P(\pi^2)$ in $\mathfrak{R}^o_{K_n}$ enthalten sind.

ii) $$\mathfrak{R}^o_{K_n} = \bigcup_{i=1}^{\binom{n}{2}} (P(\pi^1_i) \cup P(\pi^2_i))$$

Im Beispiel 3.5.6 ist π : (A,B),(C),(D) eine Partition mit n-1 = 3 Teilmengen und das Paar der geordneten Partitionen π^1 und π^2 zu π ist:

π^1 : (A,B),(C),(D) und π^2 : (D),(C),(A,B)

Die beiden vollständigen Permutationsmengen

$P(\pi^1) = \{ABCD, BACD\}$ und $P(\pi^2) = \{DCAB, DCBA\}$

sind in $\mathfrak{R}^o_{K_4}$ enthalten.

Ist π eine Partition von K_n mit n-1 Teilmengen, so ist $l(\pi)$ gerade eine Mittelsenkrechte. Es besteht nun ein enger Zusammenhang zwischen den geordneten Partitionen mit n-1 Teilmengen einer Konfiguration K_n, zu denen Inverse existieren, und der Lage der Konfigurationspunkte:

Kriterium 2 Es sei ein vollständiges Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_n}$ bzgl einer Konfiguration K_n von n Punkten i.a.L. im R^2 gegeben. Sei $\mathcal{R}^{\circ}_{K_n}$ die Menge aller Rangfolgen aus $\mathcal{R}_{K_n}$, zu denen in $\mathcal{R}_{K_n}$ inverse Rangfolgen existieren. Sei π Partition von K_n mit n-1 Teilmengen.

i) Gegeben alle vollständigen Permutationsmengen $P(\pi^1)$ und $P(\pi^2)$ für alle Partitionen π mit n-1 Teilmengen.
Dann werden Objekte derselben Teilmenge von π auf denselben Punkt auf $l(\pi)$ projiziert und die Ordnung der auf $l(\pi)$ projizierten Teilmengen ist π^1 oder π^2.

ii) Die notwendigen und hinreichenden geometrischen Beschränkungen, die die vollständigen Mengen $P(\pi^1)$ und $P(\pi^2)$ bestimmen, sind Geraden senkrecht zu $l(\pi)$, die durch Objektpunkte gehen.
Zwei Punkte A und B liegen auf derselben Seite der Geraden senkrecht auf $l(\pi)$, die durch den Punkt C geht, genau dann, wenn A und B auf derselben Seite der Teilmenge von π^1 liegen, die C enthält. A liegt auf derselben Geraden wie B genau dann, wenn A und B zur selben Teilmenge von π^1 gehören.

Mit den beiden Kriterien erhalten wir den folgenden Satz, der die quantitativen Lagemöglichkeiten der Objektpunkte aus dem vorgegebenen Rangfolgensystem beschreibt:

Satz 3.5.8 Sei $\mathcal{R}_{K_n}$ ein Rangfolgensystem bzgl einer Konfiguration K_n von n Punkten i.a.L. im R^2. Sei $X \in K_n$ ein Objektpunkt; sei $n > 3$.
Dann gilt:
Notwendige und hinreichende Bedingung für K_n, $\mathcal{R}_{K_n}$ zu erzeugen, ist:

i) X genügt den Bedingungen von Kriterium 1 bzgl K_{n-1}, bestimmt durch $\mathcal{R}_{K_n}$

ii) X genügt den Bedingungen von Kriterium 2 bzgl K_{n-1}, bestimmt durch $\mathcal{R}^o_{K_n}$.

Wir wollen dies am folgenden Beispiel nachvollziehen:

Beispiel 3.5.9 Gegeben sei wieder das vollständige Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_4}$ bzgl einer Konfiguration von 4 Punkten i.a.L. im R^2:

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BDAC	CDAB	DBAC
ACDB			DBCA
ADBC			DCAB
ADCB			DCBA

Die Teilmenge $\mathcal{R}^o_{K_n}$, die aus zueinander inversen Rangfolgen aus $\mathcal{R}_{K_4}$ besteht, ist:

1) ABCD	3) BACD	6) CABD	9) DBAC
2) ACBD	4) BADC	7) CADB	1o) DBCA
	5) BDAC	8) CDAB	11) DCAB
			12) DCBA

Wir erhalten also die folgenden Paare von inversen Rangfolgen:

(1,12) ; (2,1o) ; (3,11) ; (4,8) ; (5,7) ; (6,9)

Es sei die Konfiguration der drei Punkte A, B, C gegeben. Wir wollen mit den Kriterien 1 und 2 den vierten Punkt D so einpassen, daß die resultierende Konfiguration K_4 das vorgegebene Rangfolgensystem generiert.

Die Partitionen in K_3 mit 2 Teilmengen sind:

π_1: (A,B),(C) ; $l(\pi_1)$ = AB ; π_2: (A,C),(B) ; $l(\pi_2)$ = AC

π_3: (B,C),(A) ; $l(\pi_3)$ = BC

A) Die Permutationen in $\mathcal{R}^{o}_{K_4}$, in denen die Symbole A und B benachbart sind, sind: $\{1,3,4,6,8,9,11,12\}$

die inversen Paare sind also (1,12), (3,11), (4,8), (6,9)

d.h. die geordneten Partitionen zur Mittelsenkrechten AB (π_1) sind:

π_1^1 : (AB) C D ; π_1^2: D C (AB)

π_2^1 : (AB) C D ; π_2^2: D C (AB)

π_3^1 : (AB) D C ; π_3^2: C D (AB)

π_4^1 : C (AB) D ; π_4^2: D (AB) C

Die zugehörigen vollständigen Permutationsmengen sind:

$P(\pi_1^1) = \{ABCD, BACD\}$; $P(\pi_1^2) = \{DCAB, DCBA\}$

$p(\pi_2^1) = \{ABCD, BACD\}$; $P(\pi_2^2) = \{DCAB, DCBA\}$

$P(\pi_3^1) = \{ABDC, BADC\}$; $P(\pi_3^2) = \{CDAB, CDBA\}$

$p(\pi_4^1) = \{CABD, CBAD\}$; $P(\pi_4^2) = \{DABC, DBAC\}$

$P(\pi_3^i)$ und $P(\pi_4^i)$ liegen nicht in $\mathcal{R}^{o}_{K_4}$, $P(\pi_1^i)$ und $P(\pi_2^i)$ sind gleich, d.h. nur die Partition π_1 ist von Interesse!

B) Die Permutationen in $\mathcal{R}^{o}_{K_4}$, in denen die Symbole A und C benachbart sind, sind: $\{2,3,5,6,7,9,1o,11\}$

die inversen Paare sind also (2,1o), (3,11), (5,7), (6,9)

Damit sind die geordneten Partitionen zur Mittelsenkrechten AC (π_2):

σ_1^1 : (AC) B D ; σ_1^2 : D B (AC)

σ_2^1 : B (AC) D ; σ_2^2 : D (AC) B

σ_3^1 : B D (AC) ; σ_3^2 : (AC) D B

σ_4^1 : (AC) B D ; σ_4^2 : D B (AC)

Die zugehörigen vollständigen Permutationsmengen sind:

$P(\sigma_1^1) = \{ACBD, CABD\}$; $P(\sigma_1^2) = \{DBAC, DBCA\}$

$P(\sigma_2^1) = \{BACD, BCAD\}$; $P(\sigma_1^2) = \{DACB, DCAB\}$

$P(\sigma_3^1) = \{BDAC, BDCA\}$; $P(\sigma_3^2) = \{ACDB, CADB\}$

$P(\sigma_4^1) = \{ACBD, CABD\}$; $P(\sigma_4^2) = \{DBAC, DBCA\}$

$P(\sigma_2^i)$ und $P(\sigma_3^i)$ liegen nicht in $\mathcal{R}^o_{K_4}$, $P(\sigma_1^i)$ und $P(\sigma_4^i)$ sind gleich, d.h. nur die Partition σ_1 ist von Interesse.

C) Die Permutationen in $\mathcal{R}^o_{K_4}$, in denen die Symbole B und C benachbart sind, sind: $\{1,2,1o,12\}$

Die inversen Paare sind also: (1,12) und (2,1o)

Die geordnete Partition zur Mittelsenkrechten BC (π_3) ist

τ^1 : A (BC) D ; τ^2 : D (BC) A

Insgesamt erhalten wir also an relevanten Partitionen:

π^1 : (AB) C D ; π^2 : D C (AB)

σ^1 : (AC) B D ; σ^2 : D B (AC)

τ^1 : A (BC) D ; τ^2 : D (BC) A

Dies gibt die geometrischen Beschränkungen nach Kriterium 2:

i) $\pi \Longrightarrow$ D liegt auf der gegenüberliegenden Seite von A,B der Geraden senkrecht auf AB durch C

ii) $\sigma \Longrightarrow$ D liegt auf der gegenüberliegenden Seite von A,C der Geraden senkrecht auf AC durch B

iii) $\tau \Longrightarrow$ D liegt auf der gegenüberliegenden Seite von A der Geraden senkrecht auf BC durch B und C

Die geometrische Beschränkung nach Kriterium 1 ist die folgende:

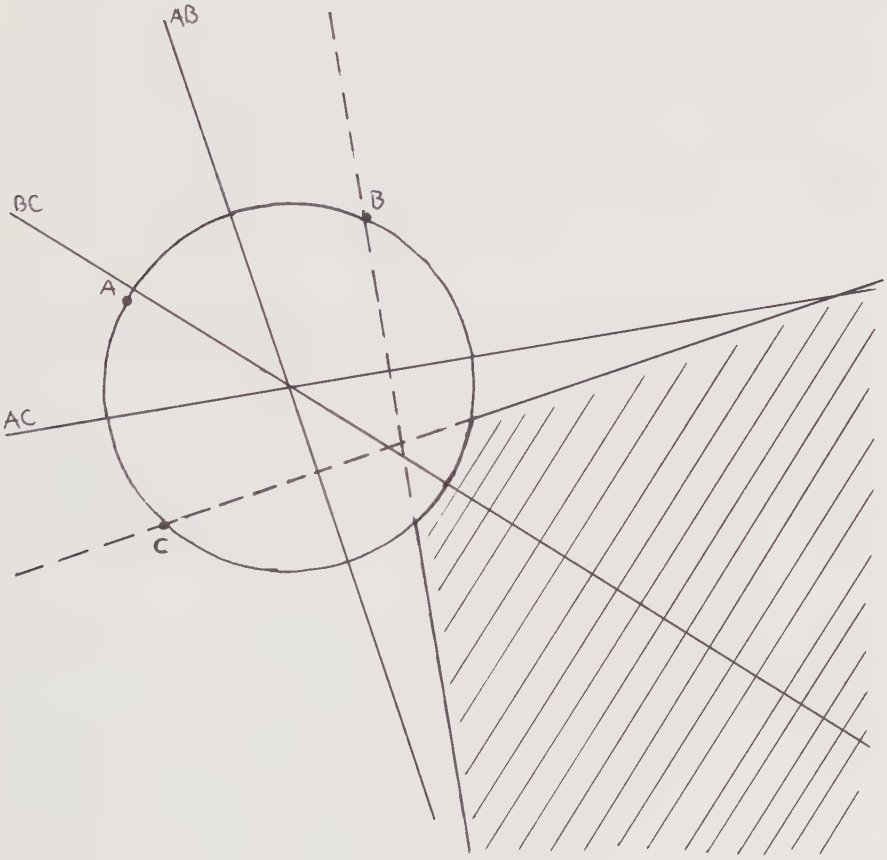
λ : (A,B,C) (D) ist die Partition mit n-2 Teilmengen.

In $\mathfrak{R}^{o}_{K_4}$ ist nur $P(\lambda^*)$ mit λ^*: (D),(A,B,C) enthalten.

Das ergibt:

D liegt ausserhalb des Kreises durch A,B,C mit Mittelpunkt E_{ABC}

Mit diesen Beschränkungen erhalten wir den schraffierten Bereich, in dem der Punkt D liegen muß, um das vorgegebene Rangfolgensystem $\mathfrak{R}_{K_4}$ zu generieren:



3.6 Zusammenfassung: Lösung des Entfaltungsproblems durch die qualitative und quantitative Beschreibung der Objekt-Konfiguration

Mit den in den Abschnitten 3.1 bis 3.5 erarbeiteten Ergebnissen können wir nun das Entfaltungsproblem wie folgt lösen:

Sei $\mathcal{R}_{K_n}$ ein vollständiges, darstellbares System von Rangfolgen gegeben. Dann wird eine zugehörige Konfiguration K_n durch den folgenden Algorithmus konstruiert:

A) Aufbau der qualitativen Struktur von K_n:

1) Bestimme die Sektoren von $\mathcal{R}_{K_n}$ und damit die Extremalpunkte der konvexen Hülle von K_n. Dies ergibt den äusseren Polygonzug.

2),.., r) Bestimme sukzessive durch Reduzierung von $\mathcal{R}_{K_n}$ bzgl der bereits bestimmten Punkte wie in 1) die jeweils nächst-inneren Polygonzüge.

B) Quantitativer Aufbau von K_n unter Berücksichtigung der qualitativen Struktur

1) Zeichne die 3 innersten Punkte der Polygonschachtelung beliebig im R^2. Bestimme die Lage eines 4-ten Punktes auf der innersten Schale durch die Kriterien von Davidson bzgl des aus $\mathcal{R}_{K_n}$ reduzierten Systems $\mathcal{R}_{K_4}$.

2),..,k) Bestimme sukzessive die quantitative Lage der Extremalpunkte auf dem innersten Polygonzug.

k+1),..,r) Bestimme sukzessive für jeden folgenden Polygonzug von innen nach aussen die Lage der Extremalpunkte auf diesem Zug.

Dieser Lösungsalgorithmus funktioniert nur im Falle eines vorgegebenen vollständigen Rangfolgensystems. Ist ein unvollständiges System M vorgegeben, so sind die darin enthaltenen qualitativen und quantitativen Informationen über eine zugehörige Objektkonfiguration nicht ausreichend, denn:

a) Ist das vorgegebene System M nicht vollständig, so ist nicht mehr sicher, ob M schon alle Sektoren des zugehörigen vollständigen Systems enthält, oder ob noch einige Sektoren fehlen, d.h. die konvexe Hülle der Konfiguration ist nicht hinreichend bestimmt. Das hat die unmittelbare Konsequenz, daß keine der nächst-inneren Polygonschalen definitiv aus M ableitbar ist. Damit ist eine qualitative Beschreibung einer zu M gehörigen Konfiguration nicht möglich.

b) Auch die quantitativen Kriterien sind nicht auf M anwendbar, da eine Zerlegung von unvollständigen Systemen in Permutationsmengen von geordneten Partitionen nicht die Eindeutigkeit besitzt, die für eine konstruktive Anwendung der quantitativen Kriterien notwendig ist!

Die Erkenntnis, daß ein vorgegebenes unvollständiges System von Rangfolgen keine ausreichenden Informationen zur Konstruktion einer Objektkonfiguration enthält, führt uns notwendigerweise zu dem Schluß, daß in einem solchen Fall das Entfaltungsproblem nur dann lösbar ist, wenn es uns gelingt, die vorgegebene Menge von Rangfolgen in irgendeiner Weise zu einem vollständigen System zu komplettieren.

Eine Möglichkeit zur Vervollständigung eines Systems von m Rangfolgen wäre ein algebraisches Erzeugendensystem, d.h. eine Menge von (algebraischen) Vorschriften, mit denen die m Rangfolgen verändert werden und das ganze System sukzessive aufgebaut wird.

Man kann die Rangfolgen in $\mathfrak{R}_{K_n}$ auffassen als Permutationen von n Objekten

und erhält so $\mathfrak{R}_{K_n}$ als Teilmenge der Symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$, also der Gruppe aller Permutationen von n Objekten. Leider ist die Gruppenstruktur nicht von $\mathfrak{S}_n$ auf $\mathfrak{R}_{K_n}$ übertragbar, da $\mathfrak{R}_{K_n}$ bzgl der Verknüpfung zweier Permutationen nicht abgeschlossen ist:

Nehmen wir zum Beispiel die beiden Rangfolgen BACD und DCBA aus dem Rangfolgensystem $\mathfrak{R}_{K_4}$ auf Seite 71, so ist DCBA ∘ BACD = CDBA eine Rangfolge, die nicht in $\mathfrak{R}_{K_4}$ liegt.

Allgemein trägt $\mathfrak{R}_{K_n}$ keine irgendwie geartete Gruppenstruktur, die ein algebraisches Erzeugendensystem ermöglichen würde. Damit müssen wir feststellen, daß es aufgrund unserer bisherigen Erkenntnisse nicht möglich ist, aus vorgegebenen m Rangfolgen, mit $m < s$, ein vollständiges System zu generieren!

3.7 Exkurs: Zur Klassifikation qualitativ verschiedener ebener Entfaltungs-Konfigurationen

Wir haben in den Abschnitten 3.1 bis 3.4 von Kapitel 3 den qualitativen Aufbau einer Konfiguration K_n von n Punkten i.a.L. im R^2 als Extremalpunkte ineinandergeschachtelter Vielecke beschrieben. Qualitativ verschiedene Konfigurationen generieren auch verschiedene Rangfolgensysteme. Wir können also das folgende Klassifikationskriterium formulieren:

Klassifikation Notwendige Voraussetzung für zwei Konfigurationen K_n^1 und K_n^2, das gleiche vollständige Rangfolgensystem zu generieren, ist, daß K_n^1 und K_n^2 die gleiche Anzahl von Polygonschalen, und auf jeder Schale die gleiche Anzahl von Objektpunkten als Extremalpunkte haben.

In Abschnitt 1.1 von Kapitel 1 haben wir für den eindimensionalen Fall die Anzahl der qualitativ verschiedenen Konfigurationen von n Objektpunkten hergeleitet (Satz 1.1.3). Wir wollen dies nun auch für den zweidimensionalen Fall versuchen. Den qualitativ unterschiedlichen J-Skalen im eindimensionalen Fall entsprechen hier die qualitativ verschiedenen Anordnungen der Konfigurationspunkte auf den verschiedenen Polygonschalen.

Die Anzahl n kann zerlegt werden a) bzgl der Anzahl r der einzelnen Polygonschalen und b) bzgl der Anzahl der Extremalpunkte jeder Polygonschale. Wir erhalten also eine Partition $\pi_n = (p_1,\ldots,p_r)$ von n, wo

p_1 die Anzahl der Punkte auf der äusseren Schale

p_2 die Anzahl der Punkte auf der nächst-inneren Schale

.
.
.

p_r die innersten Punkte oder die Anzahl der Punkte auf der innersten Schale bezeichnet.

Für alle $p_1,\ldots,p_{r-1}$ gilt also $p_i \geq 3$, da es immer mindestens 3 Extremalpunkte auf einer Polygonschale geben muß.
Die möglichen Partitionen für die ersten n geben wir in der folgenden Tabelle:

n	π_n
3	(3)
4	(4), (3,1)
5	(5), (4,1), (3,2)
6	(6), (5,1), (4,2), (3,3)
7	(7), (6,1), (5,2), (4,3), (3,4) (3,3,1)
8	(8), (7,1), (6,2), (5,3), (4,4), (3,5) (4,3,1), (3,3,2), (3,4,1)
9	(9), (8,1), (7,2), (6,3), (5,4), (4,5), (3,6) (5,3,1), (4,4,1), (4,3,2), (3,3,3), (3,4,2), (3,5,1)
1o	(1o), (9,1), (8,2), (7,3), (6,4), (5,5), (4,6), (3,7) (6,3,1), (5,4,1), (5,3,2), (4,5,1), (4,4,2), (4,3,3), (3,3,4) (3,4,3), (3,5,2), (3,6,1) (3,3,3,1)
11	(11), (1o,1), (9,2), (8,3), (7,4), (6,5), (5,6), (4,7), (3,8) (7,3,1), (6,4,1), (6,3,2), (5,5,1), (5,4,2), (5,3,3), (4,6,1) (4,5,2), (4,4,3), (4,3,4), (3,4,4), (3,5,3), (3,3,5), (3,6,2) (3,7,1) (3,3,3,2), (4,3,3,1), (3,4,3,1), (3,3,4,1)
12	(12), (11,1), (1o,2), (9,3), (8,4), (7,5), (6,6), (5,7), (4,8), (3,9) (8,3,1), (7,4,1), (7,3,2), (6,5,1), (6,4,2), (6,3,3), (5,6,1), (5,5,2), (5,4,3), (5,3,4), (4,7,1), (4,6,2), (4,5,3), (4,4,4), (4,3,5), (3,8,1), (3,7,2), (3,6,3), (3,5,4), (3,4,5), (3,3,6) (5,3,3,1), (4,3,3,2), (3,4,3,2), (3,3,4,2), (3,3,3,3), (3,5,3,1), (3,3,5,1), (4,4,3,1), (4,3,4,1), (3,4,4,1)

Man erhält also die folgende Tabelle für die von n abhängigen verschiedenen Konfigurationen, klassifiziert nach der Anzahl r der verschiedenen Schalen:

Tabelle 3.7.1

n \ r	1	2	3	4	5
3	1	-	-	-	-
4	1	1	-	-	-
5	1	2	-	-	-
6	1	3	-	-	-
7	1	4	1	-	-
8	1	5	3	-	-
9	1	6	6	-	-
1o	1	7	1o	1	-
11	1	8	15	4	-
12	1	9	21	1o	-

wo r die Anzahl der Schalen, n die Anzahl der Objektpunkte bezeichnet.

Die Gesetzmäßigkeiten dieser Tabelle sind leicht zu erkennen:

In Abhängigkeit von der Anzahl n der Objektpunkte erhalten wir:

Es gibt 1 Konfiguration mit r = 1 Schalen

" " n-3 Konfigurationen mit r = 2 Schalen

" " $\binom{n-5}{2}$ " " r = 3 "

" " $\binom{n-7}{3}$ " " r = 4 "

" " $\binom{n-9}{4}$ " " r = 5 "

usw.

r erhöht sich genau dann um 1, falls $n = k \cdot 3 + 1$ gilt, für $k \in \mathbb{N}$.

Der Abzug bei n in der Anzahl der Konfigurationen mit festem r ist gerade $2(r-1) + 1$, das Element a_{nr} in der n-ten Zeile und der r-ten Spalte der Tabelle berechnet sich also nach der Formel:

$$a_{nr} = \binom{n-2(r-1)-1}{r-1} = \binom{n-2r+1}{r-1} \quad \text{und} \quad a_{n1} = 1$$

Weiter entnehmen wir der Tabelle, daß die maximale Anzahl von Polygonschalen, die eine Konfiguration haben kann, von n begrenzt ist:
für n = 4 gibt es maximal 2 Schalen, für n = 7 maximal 3 Schalen. usw;
ist also $n = k \cdot 3 + i$, $i = 1,2,3$, so gibt es zu diesem n maximal k+1 Schalen.
Unsere Überlegungen führen zu dem folgenden Satz:

Satz 3.7.2 Bezeichnet r die Anzahl der verschiedenen ineinandergeschachtelten Polygonschalen, so gibt es zu festem n mit $n = k \cdot 3 + i$, $i = 1,2,3$, $k \in \mathbb{N}$, mindestens

$$1 + \sum_{r=2}^{k+1} \binom{n - 2r + 1}{r - 1}$$

qualitativ verschiedene Konfigurationen.

Die Formel in Satz 3.7.2 berücksichtigt nur die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen von n in r Schalen. Es ist noch keine Aussage darüber gemacht, wie die einzelnen Punkte auf den Schalen verteilt sind. Nun erhält man aber durch unterschiedliche Verteilung der n Punkte auf vorgegebene r Schalen im allgemeinen auch unterschiedliche Rangfolgensysteme.
Verschiedene Anordnungen der n Konfigurationspunkte erhält man einmal dadurch, daß man die Punkte unterschiedlich auf die r Schalen verteilt, und zum anderen dadurch, daß man die Punkte auf jeder Schale noch permutiert. Es gilt also zwei Fragen zu beantworten:

1) Es sei für jede mögliche Partition von n eine feste Verteilung der Punkte $A_1,\ldots,A_n$ auf die r Schalen gegeben, d.h. feste Zuordnungen:

$$A_{i_1},\ldots,A_{i_{p_1}} \longrightarrow \text{Schale 1}$$
$$A_{i_{p_1+1}},\ldots,A_{i_{p_2}} \longrightarrow \text{Schale 2}$$
$$\vdots$$
$$A_{i_{p_{r-1}}},\ldots,A_{i_{p_r}} \longrightarrow \text{Schale r}$$

Wieviele Permutationen gibt es bzgl dieser festen Zuordnungen?

2) Wieviele mögliche feste Verteilungen von $A_1,\ldots,A_n$ auf die r Schalen gibt es, unter der Nebenbedingung, daß bis auf die letzte Schale alle Schalen mindestens 3 Punkte enthalten müssen?

Beantworten wir zunächst die Frage 1:

Fall A): r fest.

Es sei $(p_1,\ldots,p_r)$ eine feste Zerlegung von n in $r>1$ Schalen mit je p_i Punkten auf jeder Schale (von aussen nach innen gezählt) gegeben.

Variiert man auf einer Schale die Anordnung der Punkte, und hält alle übrigen Punkte fest, so erhält man dadurch auch qualitativ verschiedene Konfigurationen. Die Anzahl der Möglichkeiten, p_i Punkte zu permutieren, ist $p_i!$. Man muß hier wirklich alle Permutationen in Betracht ziehen, da sich dadurch die Lage aller n Punkte auf den r Schalen zueinander verändert.

Damit gibt es für festes r und eine feste Partition genau $\prod_{i=1}^{r} (p_i)!$ verschiedene Permutationen.

FÜr alle möglichen Partitionen von n mit fester Verteilung der Punkte gibt es also maximal

$$\sum_{p_1+..+p_r=n} \prod_{i=1}^{r} (p_i)!$$
$$p_i \geq 3 \text{ für } i < r$$

qualitativ verschiedene Konfigurationen.

Fall B): r variabel

Ist $r = 1$, so gibt es $\frac{(n-1)!}{2}$ verschiedene Möglichkeiten, die n Konfigurationspunkte auf dem unregelmäßigen Vieleck anzuordnen, da diese Konfiguration invariant ist unter Drehungen (man kann also einen Punkt festhalten und die übrigen n-1 Punkte permutieren), und von den (n-1)! Permutationen je 2 zueinander invers sind, also dasselbe Rangfolgensystem generieren.

Für variables r erhält man damit:

Zu festem n mit $n = k \cdot 3 + 1,2,3$ gibt es maximal

$$\frac{(n-1)!}{2} + \sum_{r=2}^{k+1} \left(\sum_{\substack{p_1+..+p_r=n \\ p_i \geq 3 \text{ für } i<r}} \left(\prod_{i=1}^{r} (p_i)! \right) \right)$$

qualitativ verschiedene Konfigurationen bei fester Verteilung der Punkte auf die r Schalen für jede mögliche Partition.

Ist zum Beispiel n = 4, so gibt es 3 qualitativ verschiedene Konfigurationen mit einer Schale:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow A$$

$$A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow A$$

$$A \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow A$$

Für r = 2 erhalten wir die Konfiguration vom Typ (3,1) und damit maximal 6 qualitativ verschiedene Konfigurationen bei fester Verteilung der Punkte A,B,C,D auf die beiden Schalen.

Zu klären bleibt noch die Frage 2:

Betrachten wir zunächst den Fall r = 2:

Für n = 5 Punkte hat man die beiden Zerlegungen (4,1) und (3,2) von n. Für die erste Zerlegung gibt es $5 = \binom{n}{4}$ Möglichkeiten, die Symbole A,B,C,D,E auf zwei Mengen mit 4 und 1 Elementen zu verteilen, für die zweite Zerlegung gibt

es $1o = \binom{n}{3}$ Möglichkeiten.

Allgemein hat man also für $r = 2$ Schalen mit den Zerlegungen $n = p_1 + p_2$ $\binom{n}{p_1}$ verschiedene Verteilungsmöglichkeiten der n Punkte.

Im Fall $r = 3$ mit der Zerlegung $n = p_1 + p_2 + p_3$ gibt es zunächst $\binom{n}{p_1}$ Möglichkeiten, die n Punkte auf eine Menge mit p_1 Elementen zu verteilen. Für die restlichen $n - p_1$ Punkte bleiben damit noch $\binom{n-p_1}{p_2}$ Möglichkeiten der Verteilung auf die beiden inneren Schalen.

Allgemein gibt es also für $r = 3$ Schalen maximal $\binom{n}{p_1}\cdot\binom{n-p_1}{p_2}$ verschiedene Verteilungsmöglichkeiten.

Dieses Prinzip kann man nun für beliebige r fortsetzen und erhält:

Für n Punkte gibt es maximal

$$\binom{n}{p_1}\cdot\binom{n-p_1}{p_2}\cdot\binom{n-p_1-p_2}{p_3}\cdot \ldots \cdot \binom{n-p_1-\ldots-p_{r-2}}{p_{r-1}} = \prod_{j=1}^{r-1}\binom{n-\sum_{i=1}^{j-1} p_i}{p_j}$$

verschiedene Verteilungsmöglichkeiten der n Punkte auf r Schalen.

Die Beantwortung der Fragen 1 und 2 ergibt damit den folgenden Satz über die Maximalzahl qualitativ verschiedener Konfigurationen von n Punkten i.a.L. im R^2:

Satz 3.7.3 Zu festem n mit $n = k\cdot 3 + 1,2,3$ und der Zerlegung $n = p_1 + \ldots + p_r$ in r Schalen mit jeweils p_i Punkten (von aussen nach innen gezählt) gibt es höchstens

$$\frac{(n-1)!}{2} + \sum_{r=2}^{k+1}\left(\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_r \\ p_i \geq 3 \text{ für } i<r}}\left(\prod_{j=1}^{r-1}\binom{n-\sum_{i=1}^{j-1} p_i}{p_j}\cdot\prod_{i=1}^{r}(p_i)!\right)\right)$$

qualitativ verschiedene Konfigurationen.

Beispiel 3.7.4 Betrachten wir den Fall n = 7

r = 1: es gibt $\frac{6!}{2}$ = 360 qualitativ verschiedene Konfigurationen

r = 2: hier haben wir die Zerlegungen (6,1), (5,2), (4,3), (3,4) und damit $\binom{7}{6}\cdot 7! + \binom{7}{5}\cdot 5!\cdot 2 + \binom{7}{4}\cdot 4!\cdot 3! + \binom{7}{3}\cdot 3!\cdot 4!$ = 5040 qualitativ verschiedene Konfigurationen

r = 3 es gibt nur die Zerlegung (3,3,1), also $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot 3!\cdot 3!$ = 5040.

Für n = 7 gibt es also maximal 55 800 qualitativ verschiedene Konfigurationen.

Kapitel 4 Konstruktive Lösung des zweidimensionalen Entfaltungsproblems bei vorgegebenem *unvollständigen* Rangfolgensystem

Wie wir im vorigen Kapitel (Abschnitt 3.6) gesehen haben, reichen die Informationen, die in vorgegebenen unvollständigen Rangfolgensystemen enthalten sind, nicht aus, ein vollständiges System zu generieren. Ebenso tragen die Rangfolgensysteme keine Struktur, aus der sich Erzeugendensysteme ableiten lassen könnten. Um auch im unvollständigen Fall eine konstruktive Lösung des Entfaltungsproblems angeben zu können, müssen wir also einen Weg finden, Rangfolgensysteme so zu komplettieren, daß das resultierende System auch tatsächlich zweidimensional darstellbar ist. Dabei definieren wir die Darstellbarkeit wie folgt:

Definition Sei $\mathfrak{R}$ ein vollständiges Rangfolgensystem. Dann heißt $\mathfrak{R}$ darstellbar genau dann, wenn es eine zweidimensionale Konfiguration K_n von n Punkten i.a.L. im R^2 gibt, so daß $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{K_n}$ gilt.

In diesem Kapitel betrachten wir den allgemeinsten Fall des Entfaltungsproblems, nämlich Entfaltungskonfigurationen von n Punkten im R^{n-1}. Wir untersuchen das Schnittverhalten von *affinen Ebenen*, also zweidimensionalen affinen Unterräumen des R^{n-1}, mit dem Rangfolgensystem von Konfigurationen im R^{n-1}. Ein Schnitt einer affinen Ebene mit dem (n-1)-dimensionalen Rangfolgensystem liefert unter bestimmten Annahmen ein vollständiges, ebenes Rangfolgensystem, das wir dann auf seine Darstellbarkeit hin untersuchen. Schließlich erhalten wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an affine Ebenen zur Darstellbarkeit von ebenen Rangfolgensystemen. Mit diesem Kriterium sind wir in der Lage, unvollständig vorgegebene Rangfolgensysteme zu komplettieren durch

gewisse affine Ebenenschnitte, sofern die vorgegebenen Rangfolgen dies zulassen. Damit ist dann auch das Entfaltungsproblem bei unvollständigen Rangfolgensystemen gelöst.

4.1 Entfaltungskonfigurationen im R^{n-1}

Wir wollen in diesem Abschnitt die Geometrie der Entfaltungskonfigurationen mit n Punkten im R^{n-1} beschreiben. Die hier entwickelten Kenntnisse werden dann Grundlage der Untersuchungen in den folgenden Abschnitten sein.

Betrachten wir eine Konfiguration von n Punkten im R^{n-1}. Zunächst können wir die folgende Aussage machen:

Satz 4.1.1 Es sei K_n eine Konfiguration von n Punkten im R^{n-1}, S_{n-1} eine Sphäre. Dann gilt:

$$K_n \not\subset R^r \text{ mit } r < n-1 \Longrightarrow K_n \subset S_{n-1}$$

d.h. nutzen die n Punkte von K_n die volle Dimensionalität des R^{n-1} aus, dann liegt K_n auf einer Sphäre im R^{n-1}.

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über n.
Induktionsverankerung: Sei n = 3; 3 Punkte liegen immer auf einem Kreis. Es seien n = 4 Punkte im R^3 gegeben. 3 dieser Punkte liegen auf einem Kreis in einer Ebene im R^3. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß sie nur die ersten beiden Koordinaten des R^3 benutzen: $A_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, o)$, $i = 1,2,3$. Die A_i erfüllen die Gleichung: $\| A_i - x \|^2 = r^2$ mit einem x, $x = (x_1, x_2, 0)$. Sei $\bar{x} = (x_1, x_2, z) \in R^3$ gegeben. Die ersten drei Punk-

te A_i haben im R^3 immer $\bar{x}$ zum Mittelpunkt, da für sie $\| A_i - (x_1,x_2,z)\|^2 = r^2 + z^2$ gilt. Jeder Punkt der Form (x_1,x_2,z) ist also Mittelpunkt einer Sphäre im R^3, auf der die 3 vorgegebenen Punkte liegen.

Behauptung: z kann so gewählt werden, daß irgend ein vierter Punkt des R^3, der nicht in der Ebene der ursprünglichen 3 Punkte liegt, auf dieser Sphäre liegt.

Beweis: Sei $A_4 = (b_1.b_2,c)$, $c \neq o$. Dann gilt: $\| A_4 - \bar{x} \| = r^2 + z^2$;

also $\sum_i (b_i - x_i)^2 + (c - z)^2 = r^2 + z^2$

$\iff \sum_i (b_i - x_i)^2 + c^2 - 2cz = r^2 \iff z = \frac{1}{2c}(\sum_i (b_i - x_i)^2 + c^2 - r^2)$;

für dieses so bestimmte z gilt:

Die Punkte A_1,A_2,A_3,A_4 liegen auf einer Sphäre im R^3 mit Radius $r^2 + z^2$.

Induktionsannahme: gelte für n-1

Induktionsschluß: Seien $A_1,\ldots,A_{n-1} \in R^{n-2} \subset R^{n-1}$ wieder so gewählt, daß sie die ersten n-2 Koordinaten des R^{n-1} benutzen. Nach Induktionsannahme liegen $A_1,\ldots,A_{n-1}$ auf einer Sphäre im R^{n-2}, d.h. es gilt: $\| A_i - x \|^2 = r^2$ für $i = 1,\ldots,n-1$. Es sei $A_n \in R^{n-1}$ mit $A_n = (b_1,\ldots,b_{n-2},c)$; $c \neq o$.

Sei $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_{n-2},z)$. Überträgt man die obige Argumentation auf den allgemeinen Fall, so erhält man:

für $z = \frac{1}{2c}(\sum_i (b_i - x_i)^2 + c^2 - r^2)$ liegen $A_1,\ldots,A_n$ auf einer Sphäre im R^{n-1} mit Radius $r^2 + z^2$.

q.e.d

Korollar 4.1.2 Sei K_n eine Konfiguration von n Punkten im R^{n-1}. Dann gilt für das Rangfolgensystem von K_n:

$$| \mathfrak{R}_{K_n} | = n! \iff K_n \not\subset R^r \text{ mit } r < n-1$$

Beweis: "$\Longrightarrow$" klar, denn: Annahme: $K_n \subset R^r$ und $r < n-1$

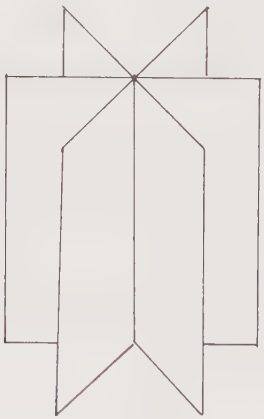
$\Longleftrightarrow$ Die Mittelsenkrecht-Hyperebenen zu gewissen Punkten von K_n liegen parallel oder fallen zusammen, d.h. $|\mathcal{R}_{K_n}|$ kann nicht maximal, und insbesondere nicht n! sein.

"$\Longleftarrow$" Satz 4.1.1 besagt, daß K_n auf einer Sphäre im R^{n-1} liegt. Dann schneiden sich alle $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrecht-Hyperebenen zu den n Punkten von K_n im Mittelpunkt dieser Sphäre.

zu zeigen: die $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrecht-Hyperebenen (MS-HE) unterteilen den R^{n-1} in n! Gebiete.

Wir zeigen wieder diese Behauptung durch Induktion über n:

Induktionsverankerung: n = 3, 4 klar.



Induktionsannahme: gelte für n-1

Induktionsschluß: Die $\binom{n-1}{2}$ MS-HE zu n-1 Punkten im R^{n-2} R^{n-1} definieren (n-1)! Gebiete. Die Einbettung der $\binom{n-1}{2}$ (n-3)-dimensionalen MS-HE zu n-1 Punkten im R^{n-2} als (n-2)-dimensionale MS-HE im R^{n-1} beinhaltet wie beim Schritt von R^2 nach R^3, daß sie entsprechend der zusätzlichen Dimension längs

einer Geraden durch den Mittelpunkt der Sphäre zusammentreffen.
Nimmt man nun einen weiteren Punkt A_n hinzu, so entstehen zusätzlich n-1 neue MS-HE. Die erste dieser n-1 neuen MS-HE geht durch alle (n-1)! bestehenden Gebiete (bzgl der n-1 Punkte) und den Mittelpunkt der Sphäre. Dabei entstehen 2(n-1)! Gebiete. Jede der restlichen n-2 MS-HE geht durch (n-1)! Gebiete, da sie durch den Mittelpunkt der Sphäre gehen muß. Damit erzeugt jede der n-2 MS-HE (n-1)! neue Gebiete. Insgesamt unterteilen also die $\binom{n}{2}$ MS-HE zu K_n den R^{n-1} in 2(n-1)! + (n-2)(n-1)! = n! Gebiete.

q.e.d.

Definition 4.1.3 n Punkte $A_1,\ldots,A_n$ einer Konfiguration K_n im R^{n-1} sind in allgemeiner Lage (i.a.L.) genau dann, wenn K_n nicht in einem Unterraum des R^{n-1} liegt.

Korollar 4.1.2 besagt, daß jede vorgegebene Menge von Rangfolgen im R^{n-1} darstellbar ist, d.h. zu jeder vorgegebenen Menge von Rangfolgen gibt es eine Konfiguration von n Punkten i.a.L. im R^{n-1}, deren Rangfolgensystem die vorgegebenen Rangfolgen enthält. Der R^{n-1} ist also der allgemeinste Darstellungsraum für Entfaltungsprobleme von n Objekten.

Wir werden nun Eigenschaften der Entfaltungskonfigurationen im R^{n-1} herausarbeiten, die für die folgenden Untersuchungen wesentlich sind.
Dazu betrachten wir die Konfigurationen K_n als geordnete Mengen:
$K_n = (A_1,\ldots,A_n)$.
Sei $\mathcal{K}_n$ die Menge aller Entfaltungskonfigurationen im R^{n-1} mit n! Rangfolgengebieten: $\mathcal{K}_n = \left\{ K_n \subset R^{n-1} \,\middle|\, |\mathcal{R}_{K_n}| = n! \right\}$

$\mathcal{K}_n$ ist als Menge von geordneten Mengen eine Teilmenge des $R^{n(n-1)}$.

Satz 4.1.4 $\mathcal{H}_n \subset R^{n(n-1)}$ ist offen und dicht.

Beweis: i) $\mathcal{H}_n$ ist offen

Sei $K_n \in \mathcal{H}_n$. Zu jedem Punkt von K_n gibt es eine kleine Umgebung $U_\varepsilon(A_i)$ im R^{n-1}, so daß Änderungen der Lage von A_i innerhalb dieser Umgebung das Rangfolgensystem $\mathcal{R}_{K_n}$ invariant lassen. Sei $\varepsilon^r = \min_{\varepsilon_i^r} U_{\varepsilon_i^r}(A_i)$, $i = 1,..,n$; $r=1,..,n-1$ d.h. ε^r ist der kleinste Wert bzgl der r-ten Koordinate, mit dem alle n Punkte von K_n bzgl dieser Koordinate verändert werden können.

Sei $\varepsilon := (\varepsilon^1,...,\varepsilon^{n-1})$. Dann ist U_ε offene Umgebung von K_n im $R^{n(n-1)}$. Nach Konstruktion liegen in U_ε nur Konfigurationen aus $\mathcal{H}_n$, d.h. jede Konfigura- K_n ist innerer Punkt von $\mathcal{H}_n$. Damit ist $\mathcal{H}_n$ offen in $R^{n(n-1)}$.

ii) $\mathcal{H}_n$ ist dicht im $R^{n(n-1)}$

Definition: Sei $S \subset R^n$; $x \in R^n$ nicht notwendig in S. Dann heißt x adhärent zu S genau dann, wenn jede offene Umgebung von x mindestens einen Punkt von S enthält.

Insbesondere ist also jeder Punkt von S adhärent zu S; das bedeutet für $\mathcal{H}_n$: jede Konfiguration aus $\mathcal{H}_n$ ist adhärent zu $\mathcal{H}_n$. Sei $\tilde{K}_n \subset R^{n-1}$ eine Konfiguration mit weniger als n! Rangfolgen. Dann ist $\tilde{K}_n$ adhärent zu $\mathcal{H}_n$ im $R^{n(n-1)}$, denn $|\mathcal{R}_{\tilde{K}_n}| < n! \Longrightarrow$ die Punkte von $\tilde{K}_n$ sind in spezieller Lage; perturbieren der Punkte von $\tilde{K}_n$ führt aber aus der speziellen Lage heraus, d.h. in jeder offenen Umgebung von $\tilde{K}_n$ liegen Konfigurationen aus $\mathcal{H}_n$.

Definition: Der Abschluß $\bar{S}$ von $S \subset R^n$ ist die Menge aller adhärenten Punkte zu S.

Definition: $S \subset R^n$ dicht im $R^n \Longleftrightarrow S \subset R^n \subset \bar{S}$.

Wir müssen also zeigen: $R^{n(n-1)} \subset \overline{\mathcal{H}_n}$:

Sei $X \in R^{n(n-1)}$. Dann läßt sich X in eindeutiger Weise als n x (n-1)- Matrix schreiben, d.h. X entspricht einer Konfiguration von n Punkten im R^{n-1};

d.h. X definiert eine Konfiguration von n Punkten in allgemeiner oder spezieller Lage im R^{n-1}, d.h. $X \in \overline{\mathcal{H}_n}$.
Damit ist $\mathcal{H}_n \subset R^{n(n-1)}$ dicht.

q.e.d.

Satz 4.1.5 $\mathcal{H}_n \subset R^{n(n-1)}$ ist nicht zusammenhängend

Beweis: Seien K_n^1 und K_n^2 Konfigurationen aus $\mathcal{H}_n$, K_n^1 spiegelsymmetrisch zu K_n^2. Für n = 3 seien zum Beispiel $K_n^1 = ((o,o), (o,1), (1, \frac{1}{2}))$ und $K_n^2 = ((o,o), (o,1), (-1, \frac{1}{2}))$:

Sei $\lambda : [o,1] \longrightarrow R^{n(n-1)}$ ein Weg in $\mathcal{H}_n$, definiert durch
$\lambda \longrightarrow \lambda K_n^1 + (1-\lambda)K_n^2 =: K_n^\lambda$
Im Beispiel ist $K_n^\lambda = ((o,o), (o,1), (2\lambda-1, \frac{1}{2}))$. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ist
$K_n^\lambda = ((o,o), (o,1), (o,\frac{1}{2}))$, d.h. die 3 Punkte liegen auf einer Geraden,
K_n^λ ist also für $\lambda = \frac{1}{2}$ kein Element aus $\mathcal{H}_n$.
Allgemein gibt es für so gewählte K_n^1 und K_n^2 keinen Weg in $R^{n(n-1)}$, der K_n^1 mit K_n^2 innerhalb $\mathcal{H}_n$ verbindet.
$\mathcal{H}_n$ ist also nicht weg-zusammmenhängend.
Ist $S \subset R^n$ offen, so gilt: S zusammenhängend $\Longleftrightarrow$ S weg-zusammenhängend.
Damit haben wir gezeigt: $\mathcal{H}_n \subset R^{n(n-1)}$ ist nicht zusammenhängend.

q.e.d.

Nun wissen wir, daß Entfaltungskonfigurationen invariant sind unter den geometrie-erhaltenden Operationen Drehungen, Spiegelungen, Translationen und

Streckungen.

Definition 4.1.6 Sei '$\sim$' eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{H}_n$, definiert durch:

$K_n^1 \sim K_n^2 \Longleftrightarrow$ es gibt eine geometrie-erhaltende Operation g mit

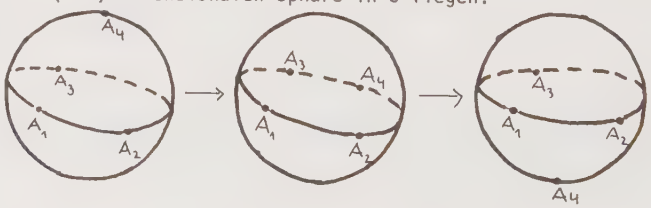
$$K_n^1 = gK_n^2$$

Es sei $[K_n]$ die Äquivalenzklasse aller zu K_n äquivalenten Konfigurationen in $\mathfrak{H}_n$.

Dann bezeichne $\tilde{\mathfrak{H}}_n := \mathfrak{H}_n/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen von Konfigurationen in $\mathfrak{H}_n$.

Satz 4.1.7 $\tilde{\mathfrak{H}}_n$ ist zusammenhängend

Beweis: Es seien K_n^1 und K_n^2 aus $\mathfrak{H}_n$ zwei Konfigurationen im R^{n-1}.
Dann gibt es in $[K_n^1]$ eine Konfiguration $\bar{K}_n^1$, so daß $\bar{K}_n^1$ und K_n^2 auf der gleichen Sphäre S im R^{n-1} liegen (es gibt eine Translation und eine Streckung, die die Sphäre, auf der K_n^1 liegt, in die Sphäre mit K_n^2 überführen).
Sei λ ein Weg auf $S \subset R^{n-1}$, λ definiert durch: $\lambda \longrightarrow K_n^\lambda \subset S$.
Dann gilt: $K_n^\lambda \notin \mathfrak{H}_n \Longleftrightarrow$ die Punkte von K_n^λ liegen auf einer (n-i)-dimensionalen Sphäre, die in S enthalten ist, $i \geq 2$.
Sind also $\bar{K}_n^1$ und K_n^2 auf einer Sphäre S gegeben, so ist $\bar{K}_n^1$ genau dann nicht durch einen stetigen Weg auf S innerhalb $\mathfrak{H}_n$ in K_n^2 überführbar, wenn auch durch Drehung von $\bar{K}_n^1$ auf S nicht zu vermeiden ist, daß die Verschiebung der Punkte von $\bar{K}_n^1$ längs Bahnen auf S zu einer Konfiguration führt, deren Punkte alle auf einer (n-i)-dimensionalen Sphäre in S liegen.



Allgemein sind stetige Veränderungen der Punkte einer Konfiguration K_n stetige Veränderungen der Lage der Mittelsenkrecht-Hyperebenen (MS-HE) zueinander. Qualitativ verschiedene Rangfolgensysteme im R^{n-1} können nur entstehen, wenn die MS-HE irgendwann bei der stetigen Veränderung singuläre Lagen einnehmen. Solche Veränderungen sind aber durch die Forderung, daß alle Konfigurationen des stetigen Weges in $\mathfrak{K}_n$ liegen müssen, ausgeschlossen. Damit treten die einzigen qualitativen Veränderungen durch Spiegelungen auf, d.h. in unserem Beispiel sind $\overline{K}_n^1$ und K_n^2 spiegelsymmetrisch.
Nach Definition liegen in $[\![K_n^1]\!]$ auch alle zu K_n^1 spiegelsymmetrischen Konfigurationen, d.h. $[\![K_n^1]\!]$ und $[\![K_n^2]\!]$ sind immer durch einen stetigen Weg innerhalb $\tilde{\mathfrak{K}}_n$ zu verbinden.

$\Longrightarrow$ $\tilde{\mathfrak{K}}_n$ wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ $\tilde{\mathfrak{K}}_n$ zusammenhängend.

q.e.d.

Satz 4.1.7 setzt uns in die Lage, alle folgenden Untersuchungen auf eine Konfiguration (-sklasse) im R^{n-1} beschränken zu können, da durch den Zusammenhang von $\tilde{\mathfrak{K}}_n$ alle übrigen Konfigurationsklassen stetig in die ausgewählte Standardkonfiguration überführbar sind und somit alle Ergebnisse, die wir noch herleiten werden, den allgemeinen Fall behandeln. Der Zusammenhang von $\tilde{\mathfrak{K}}_n$ ist ein wesentlicher Bestandteil der Notwendigkeit des in Abschnitt 4.4 hergeleiteten Kriteriums zur Darstellbarkeit von ebenen Rangfolgensystemen.

Definition der Standard-Konfiguration K_n^* im R^{n-1}

Sei $K_n^* \subset R^{n-1}$ definiert durch:

$$A_o = (o,\ldots,o); \quad A_i = (o,..,o,\underset{\uparrow}{1}_{i},o,..,o) \ , \quad i = 1,\ldots,n-1$$

K_n^* bildet also die Eckpunkte des Standard-Simplex im R^{n-1}.

Satz 4.1.8 a) Sei H_{ij} die Mittelsenkrecht-Hyperebene (MS-HE) zu den Punkten A_i und A_j von K_n^*. Dann gilt:

$$H_{oi} = \left\{ x \in R^{n-1} \mid x_i = \frac{1}{2} \right\} \qquad \text{für } i = 1,\ldots,n-1$$

$$H_{ij} = \left\{ x \in R^{n-1} \mid x_i = x_j \right\} \qquad \text{für } i < j,\ i = 1,\ldots,n-1$$

b) Die n! Rangfolgengebiete $A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ sind beschrieben durch:

$$A_{i_1} \ldots A_{i_n} = \left\{ (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in R^{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ x_{i_j} < x_{i_{j+1}} \quad \text{für } i_j,\ i_{j+1} \neq o \\ 2)\ x_{i_j} < \frac{1}{2} \quad \text{für } i_{j+1} = o \\ 3)\ x_{i_{j+1}} > \frac{1}{2} \quad \text{für } i_j = o \end{array} \right\}$$

c) Jedes Gebiet $A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ von $\mathfrak{R}_{K_n^*}$ im R^{n-1} ist ein (n-1)-dimensionaler konvexer Kegel mit Spitze im Punkt $(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}) \in R^{n-1}$, berandet von den n-1 MS-HE: $H_{i_1 i_2}, H_{i_2 i_3}, \ldots, H_{i_{n-1} i_n}$.

Beweis: zu a): H_{ij} MS-HE zu $A_i = (o,..,o,\underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1},o,..,o)$ und $A_j = (o,..,o,\underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1},o,..,o)$

$$\Longleftrightarrow H_{ij} = \left\{ x \in R^{n-1} \mid d(x,A_i) = d(x,A_j) \right\}$$

$$d(x,A_i) = d(x,A_j) \Longrightarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} x_k^2 + (x_i - 1)^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n-1} x_k^2 + (x_j - 1)^2$$

$$\Longleftrightarrow x_j^2 + (x_i - 1)^2 = x_i^2 + (x_j - 1)^2 \Longleftrightarrow x_i = x_j$$

also $H_{ij} = \left\{ x \in R^{n-1} \mid x_i = x_j \right\}$.

Für die MS-HE H_{oi} bzgl A_o und A_i erhält man:

$$d(x,A_o) = d(x,A_i) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} x_k^2 + (x_i - 1)^2 \Longleftrightarrow x_i = \frac{1}{2};$$

also $H_{oi} = \left\{ x \in R^{n-1} \mid x_i = \frac{1}{2} \right\}$.

zu b): Das Gebiet $A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ war definiert durch:

$$A_{i_1} \ldots A_{i_n} = \left\{ x \in R^{n-1} \mid d(x,A_{i_1}) > d(x,A_{i_2}) > \ldots > d(x,A_{i_n}) \right\}.$$

Die Beziehungen $d(x,A_{i_j}) > d(x,A_{i_{j+1}})$ führen durch zu a) analoge Rechnungen zu den im Satz 4.1.8 angegebenen Ungleichungen.

zu c) Jedes Gebiet von $\mathfrak{R}_{K_n^*}$ ist endlicher Durchschnitt konvexer Mengen (der durch die MS-HE gebildeten konvexen Halbräume des R^{n-1}), also ist jedes Gebiet konvex.

Alle MS-HE schneiden sich im Punkt $(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$, dem Schwerpunkt von K_n^*.

$\Longrightarrow$ alle Gebiete von $\mathfrak{R}_{K_n^*}$ hängen in $(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$ zusammen

$\Longrightarrow$ jedes Gebiet ist ein konvexer, polyedrischer Kegel mit Spitze im Punkt $(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$ im R^{n-1}.

Sei G_i ein Gebiet aus $\mathfrak{R}_{K_n^*}$.

i) Die MS-HE sind nach Definition der Ort aller Punkte im R^{n-1}, die zu 2 Punkten von K_n^* den gleichen Abstand haben; d.h. jede MS-HE H_{ij} trennt zwei Gebiete, die sich im Abstandsverhalten gerade der beiden Punkte unterscheiden, bzgl derer H_{ij} MS-HE ist. Die Symbole der beiden Punkte stehen also in G_i nebeneinander. Formal kann man aus $G_i = A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ maximal n-1 Paare von nebeneinanderstehenden Symbolen bilden

$\Longrightarrow$ G_i wird maximal von n-1 MS-HE berandet.

ii) Andererseits folgt aus $|\mathfrak{R}_{K_n^*}| = n!$, daß es zu jedem G_i ein G_i' gibt, das sich von G_i nur durch Vertauschung zweier nebeneinanderliegender Symbole unterscheidet. Ist also $G = A_{i_1} \ldots A_{i_n}$, so existieren zu G_i die n-1 Gebiete $G^1 = A_{i_2} A_{i_1} \ldots A_{i_n}, \ldots, G^{n-1} = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_n} A_{i_{n-1}}$. Nach Definition müssen alle diese Gebiete benachbart sein

$\Longrightarrow$ G_i hat mindestens n-1 Rand-Hyperebenen.

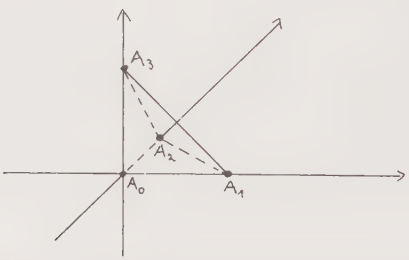
q.e.d.

4.2 Die Geometrie der Mittelsenkrecht-Hyperebenen zu K_n^* und ihr Schnittverhalten mit affinen Ebenen im R^{n-1}

In diesem Abschnitt wollen wir ein tieferes Verständnis für die Geometrie der $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrecht-Hyperebenen (MS-HE) zur Standard-Konfiguration K_n^* im R^{n-1} gewinnen. Wir werden sehen, daß die 'allgemeine Lage' für Punkte im R^{n-1} andere Konsequenzen für die Lage der MS-HE zueinander hat, als wir das für ebene Punkt-Konfigurationen gewohnt sind. Auf der Grundlage der erarbeiteten Geometrie-Vorstellungen werden wir dann das Schnittverhalten der MS-HE-Konfiguration mit affinen Ebenen im R^{n-1} untersuchen und ein erstes, wichtiges Ergebnis ableiten. Betrachten wir zunächst einige Beispiele:

Beispiel 4.2.1 Die Geometrie der MS-HE zu K_n^* für n = 4

Die Standard-Konfiguration K_4^* im R^3 hat die Gestalt:



Die zugehörigen 2-dimensionalen MS-HE im R^3 sind beschrieben durch:

H_{01}: $x_1 = \frac{1}{2}$; H_{02}: $x_2 = \frac{1}{2}$; H_{03}: $x_3 = \frac{1}{2}$;

H_{12}: $x_1 = x_2$; H_{13}: $x_1 = x_3$; H_{23}: $x_2 = x_3$

Das Schnittverhalten der MS-HE untereinander ist wie folgt:

1) $U_1 = \left\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_3)\right\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{12}$

2) $U_2 = \left\{(\frac{1}{2}, x_2, \frac{1}{2})\right\} = H_{01} \cap H_{03} \cap H_{13}$

3) $U_3 = \left\{(x_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\} = H_{02} \cap H_{03} \cap H_{23}$

4) $U_4 = \left\{(x_1, x_1, x_1)\right\} = H_{12} \cap H_{13} \cap H_{23}$

Alle diese 1-dimensionalen Unterräume U_i schneiden sich im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Wir sehen: 1) je 3 der MS-HE schneiden sich längs einer Geraden U_i

2) alle diese Geraden und damit alle MS-HE schneiden sich in einem Punkt

3) Daneben gibt es noch die gewöhnlichen Schnitte der Ebenen $H_{ij} \cap H_{kl}$, i,j,k,l alle verschieden.

Beispiel 4.2.2 Die Geometrie der MS-HE zu K_n^* für n = 5

Die Standard-Konfiguration K_5^* im R^4 ist das 5-Simplex S_5 im R^4.

Dieses Simplex hat als Rand 5 Standard-4-Simplizes:

$S_4^1 = (A_0,A_1,A_2,A_3)$; $S_4^2 = (A_0,A_1,A_2,A_4)$; $S_4^3 = (A_0,A_1,A_3,A_4)$

$S_4^4 = (A_0,A_2,A_3,A_4)$; $S_4^5 = (A_1,A_2,A_3,A_4)$,

die jeweils längs einer Dreiecksfläche aneinanderstoßen.

Das Schnittverhalten der zehn 3-dimensionalen MS-HE (neben den gewöhnlichen Schnitten) ist:

1) $U_1 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_3, x_4)\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{12}$;

2) $U_2 = \{(\frac{1}{2}, x_2, \frac{1}{2}, x_4)\} = H_{01} \cap H_{03} \cap H_{13}$;

3) $U_3 = \{(\frac{1}{2}, x_2, x_3, \frac{1}{2})\} = H_{01} \cap H_{04} \cap H_{14}$;

4) $U_4 = \{(x_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_4)\} = H_{02} \cap H_{03} \cap H_{23}$;

5) $U_5 = \{(x_1, \frac{1}{2}, x_3, \frac{1}{2})\} = H_{02} \cap H_{04} \cap H_{24}$;

6) $U_6 = \{(x_1, x_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = H_{03} \cap H_{04} \cap H_{34}$;

7) $U_7 = \{(x_1, x_1, x_1, x_4)\} = H_{12} \cap H_{13} \cap H_{23}$;

8) $U_8 = \{(x_1, x_1, x_3, x_1)\} = H_{12} \cap H_{14} \cap H_{24}$;

9) $U_9 = \{(x_1, x_2, x_1, x_1)\} = H_{13} \cap H_{14} \cap H_{34}$;

1o) $U_{10} = \{(x_1, x_2, x_2, x_2)\} = H_{23} \cap H_{24} \cap H_{34}$;

Je 6 der 1o MS-HE schneiden sich längs eines 1-dimensionalen Unterraums V:

$V_1 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_4)\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{03} \cap H_{12} \cap H_{13} \cap H_{23}$

$V_2 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_3, \frac{1}{2})\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{04} \cap H_{12} \cap H_{14} \cap H_{24}$

$V_3 = \{(\frac{1}{2}, x_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = H_{01} \cap H_{03} \cap H_{04} \cap H_{13} \cap H_{14} \cap H_{34}$

$V_4 = \{(x_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = H_{02} \cap H_{03} \cap H_{04} \cap H_{23} \cap H_{24} \cap H_{34}$

$V_5 = \{(x_1, x_1, x_1, x_1)\} = H_{12} \cap H_{13} \cap H_{14} \cap H_{23} \cap H_{24} \cap H_{34}$

Alle MS-HE schneiden sich in einem Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Die 1-dimensionalen Schnitträume $V_1, .., V_5$ stehen in eindeutiger Beziehung zu den 5 Randsimplizes des Standard-5-Simplex im R^4:

V_i ist der Schnittraum der 6 MS-HE, die zu S_4^i im R^4 gehören, für i = 1,..,5.

Beispiel 4.2.3 Die Geometrie der MS-HE zu K_n^* für n = 6

Die Standard-Konfiguration K_6^* ist das Standard-6-Simplex im R^5.

Der Rand von S_6 besteht aus den 6 Standard-5-Simplizes:

$S_5^1 = (A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$; $S_5^2 = (A_0, A_1, A_2, A_3, A_5)$; $S_5^3 = (A_0, A_1, A_2, A_4, A_5)$;

$S_5^4 = (A_0, A_1, A_3, A_4, A_5)$; $S_5^5 = (A_0, A_2, A_3, A_4, A_5)$; $S_5^6 = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$,

die jeweils längs eines Tetraeders aufeinanderstoßen.

Das Schnittverhalten (neben den gewöhnlichen Schnitten) ist:

Je 3 der 15 MS-HE schneiden sich längs eines 3-dimensionalen Unterraums U_i:

$U_1 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_3, x_4, x_5)\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{12}$;

$U_2 = \{(\frac{1}{2}, x_2, \frac{1}{2}, x_4, x_5)\} = H_{01} \cap H_{03} \cap H_{13}$;

$U_3 = \{(\frac{1}{2}, x_2, x_3, \frac{1}{2}, x_5)\} = H_{01} \cap H_{04} \cap H_{14}$;

$U_4 = \{(\frac{1}{2}, x_2, x_3, x_4, \frac{1}{2})\} = H_{01} \cap H_{05} \cap H_{15}$;

$U_5 = \{(x_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_4, x_5)\} = H_{02} \cap H_{03} \cap H_{23}$;

$U_6 = \{(x_1, \frac{1}{2}, x_3, \frac{1}{2}, x_5)\} = H_{02} \cap H_{04} \cap H_{24}$;

$U_7 = \{(x_1, \frac{1}{2}, x_3, x_4, \frac{1}{2})\} = H_{02} \cap H_{05} \cap H_{25}$;

$U_8 = \{(x_1, x_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_5)\} = H_{03} \cap H_{04} \cap H_{34}$;

$U_9 = \{(x_1, x_2, \frac{1}{2}, x_4, \frac{1}{2})\} = H_{03} \cap H_{05} \cap H_{35}$;

$U_{10} = \{(x_1, x_2, x_3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = H_{04} \cap H_{05} \cap H_{45}$;

$U_{11} = \{(x_1,x_1,x_1,x_4,x_5)\} = H_{12} \cap H_{13} \cap H_{23}$;

$U_{12} = \{(x_1,x_1,x_3,x_1,x_5)\} = H_{12} \cap H_{14} \cap H_{24}$;

$U_{13} = \{(x_1,x_1,x_3,x_4,x_1)\} = H_{12} \cap H_{15} \cap H_{25}$;

$U_{14} = \{(x_1,x_2,x_1,x_1,x_5)\} = H_{13} \cap H_{14} \cap H_{34}$;

$U_{15} = \{(x_1,x_2,x_1,x_4,x_1)\} = H_{13} \cap H_{15} \cap H_{35}$;

$U_{16} = \{(x_1,x_2,x_3,x_1,x_1)\} = H_{14} \cap H_{15} \cap H_{45}$;

$U_{17} = \{(x_1,x_2,x_2,x_2,x_5)\} = H_{23} \cap H_{24} \cap H_{34}$;

$U_{18} = \{(x_1,x_2,x_2,x_4,x_2)\} = H_{23} \cap H_{25} \cap H_{35}$;

$U_{19} = \{(x_1,x_2,x_3,x_2,x_2)\} = H_{24} \cap H_{25} \cap H_{35}$;

$U_{20} = \{(x_1,x_2,x_3,x_3,x_3)\} = H_{34} \cap H_{35} \cap H_{45}$;

Je 6 der 15 MS-HE schneiden sich längs eines 2-dimensionalen Unterraums V_i:

$V_1 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_4, x_5)\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{03} \cap H_{12} \cap H_{13} \cap H_{23}$

$V_2 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_3, \frac{1}{2}, x_5)\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{04} \cap H_{12} \cap H_{14} \cap H_{24}$

$V_3 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_3, x_4, \frac{1}{2})\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{05} \cap H_{12} \cap H_{15} \cap H_{25}$

$V_4 = \{(\frac{1}{2}, x_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_5)\} = H_{01} \cap H_{03} \cap H_{04} \cap H_{13} \cap H_{14} \cap H_{34}$

$V_5 = \{(\frac{1}{2}, x_2, \frac{1}{2}, x_4, \frac{1}{2})\} = H_{01} \cap H_{03} \cap H_{05} \cap H_{13} \cap H_{15} \cap H_{35}$

$V_6 = \{(\frac{1}{2}, x_2, x_3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = H_{01} \cap H_{04} \cap H_{05} \cap H_{14} \cap H_{15} \cap H_{45}$

$V_7 = \{(x_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_5)\} = H_{02} \cap H_{03} \cap H_{04} \cap H_{23} \cap H_{24} \cap H_{34}$

$V_8 = \{(x_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_4, \frac{1}{2})\} = H_{02} \cap H_{03} \cap H_{05} \cap H_{23} \cap H_{25} \cap H_{35}$

$V_9 = \{(x_1, \frac{1}{2}, x_3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = H_{02} \cap H_{04} \cap H_{05} \cap H_{24} \cap H_{25} \cap H_{45}$

$V_{10} = \{(x_1, x_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = H_{03} \cap H_{04} \cap H_{05} \cap H_{34} \cap H_{35} \cap H_{45}$

Je 10 der 15 MS-HE schneiden sich längs eines 1-dimensionalen Unterraums W_i:

$W_1 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_5)\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{03} \cap H_{04} \cap H_{12} \cap H_{13} \cap H_{14} \cap H_{23} \cap H_{24} \cap H_{34}$

$W_2 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_4, \frac{1}{2})\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{03} \cap H_{05} \cap H_{12} \cap H_{13} \cap H_{15} \cap H_{23} \cap H_{25} \cap H_{35}$

$W_3 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = H_{01} \cap H_{02} \cap H_{04} \cap H_{05} \cap H_{12} \cap H_{14} \cap H_{15} \cap H_{24} \cap H_{25} \cap H_{45}$

$W_4 = \{(\frac{1}{2}, x_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = H_{01} \cap H_{03} \cap H_{04} \cap H_{05} \cap H_{13} \cap H_{14} \cap H_{15} \cap H_{34} \cap H_{35} \cap H_{45}$

$W_5 = \left\{(x_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\} = H_{02} \cap H_{03} \cap H_{04} \cap H_{05} \cap H_{23} \cap H_{24} \cap H_{25} \cap H_{34} \cap H_{35} \cap H_{45}$

$W_6 = \left\{(x_1, x_1, x_1, x_1, x_1)\right\} = H_{12} \cap H_{13} \cap H_{14} \cap H_{15} \cap H_{23} \cap H_{24} \cap H_{25} \cap H_{34} \cap H_{35} \cap H_{45}$

Alle MS-HE zu K_6^* schneiden sich im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Wieder stehen die 1-dimensionalen Unterräume W_i in eindeutiger Beziehung zu den 6 Randsimplizes des Standard-6-Simplex im R^5:
W_i ist der Schnittraum der 10 MS-HE, die zu S_5^i im R^5 gehören, für i = 1,..,6.

Allgemein erhalten wir:

Lemma 4.2.4 Von den $\binom{n}{2}$ MS-HE zu K_n^* im R^{n-1} schneiden sich je $\binom{n-i}{2}$ längs eines i-dimensionalen Unterraums für i = 0,1,...,n-3.

ImGegensatz zu 2-dimensionalen Entfaltungs-Konfigurationen von n Punkten i.a.L. wo es höchstens 3-fache Schnittpunkte geben darf, gibt es für allgemeine Entfaltungs-Konfigurationen im R^{n-1} i.a.L. $\binom{n-i}{2}$ - fache Schnitträume der MS-HE, und sogar einen Punkt, in dem alle $\binom{n}{2}$ MS-HE sich schneiden.

Im zweiten Teil dieses Abschnitts wollen wir nun das Schnittverhalten der Konfiguration der $\binom{n}{2}$ MS-HE zu K_n^* mit affinen Ebenen im R^{n-1} untersuchen. Dabei betrachten wir die affinen Ebenen als algebraische Teilmengen des R^{n-1}, d.h. als Lösungsmengen von inhomogenen linearen Gleichungssystemen.
Zunächst können wir die folgende allgemeine Aussage über das Schnittverhalten einer affinen Ebene mit einem Hyperraum des R^{n-1} machen:

Lemma 4.2.5 Sei E eine affine Ebene im R^{n-1}, H ein Hyperraum des R^{n-1}.

Dann gilt:

1) $E \cap H = E$, oder

2) $E \cap H = G$ eine Gerade im R^{n-1}, oder

3) $E \cap H = \emptyset$

Beweis: Eine affine Ebene im R^{n-1} ist durch n-3 Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + a_n = 0$$

gegeben. Ein Hyperraum H im R^{n-1} ist durch eine Gleichung der obigen Form mit oder ohne Absolutglied a_n gegeben. Damit sind die folgenden 3 Fälle möglich:

a) Die Gleichung des Hyperraums ist im System der Gleichungen für E enthalten

$\Longrightarrow$ $E \cap H$ ist durch n-3 Gleichungen beschrieben, d.h. $E \cap H = E$.

b) Durch die Gleichung für H kann eine zusätzliche Variable eliminiert werden

$\Longrightarrow$ $E \cap H$ ist durch n-2 Gleichungen beschrieben

$\Longrightarrow$ $E \cap H = G$ eine Gerade im R^{n-1}.

c) Die n-3 + 1 Gleichungen von E und H enthalten einen Widerspruch

$\Longrightarrow$ $E \cap H = \emptyset$

q.e.d.

Mit diesem Lemma können wir nun das Schnittverhalten von E mit der MS-HE-Konfiguration von K_n^* im R^{n-1} untersuchen:

Korollar 4.2.6 Sei E eine affine Ebene im R^{n-1}, $M := \bigcup_{i<j} H_{ij}$ die Konfiguration der $\binom{n}{2}$ MS-HE zu K_n^*. Sei E so gewählt, daß E nicht ganz in einem H_{ij} enthalten oder parallel zu einem H_{ij} ist.

Dann gilt:

$E \cap M$ ist eine Konfiguration von $\binom{n}{2}$ Geraden auf E.

Beweis: Die H_{ij} sind (n-2)-dimensionale Unterräume des R^{n-1}. Nach Voraussetzung ist $E \not\subset H_{ij}$ und $E \cap H_{ij} \neq \emptyset$. Dann folgt aus dem Lemma: $E \cap H_{ij} = G_{ij}$ eine Gerade auf E für alle (i,j) mit $i < j$.

q.e.d.

Betrachten wir nun unter den Voraussetzungen von Korollar 4.2.6 den Schnitt von E mit den MS-HE genauer:

A) Die $\binom{n}{2}$ MS-HE zu K_n^* schneiden sich zu je dreien in insgesamt $\binom{n}{3}$ (n-3)-dimensionalen Unterräumen des R^{n-1} (nach Konstruktion der MS-HE)! Jeder dieser $\binom{n}{3}$ (n-3)-dimensionalen Unterräume ist im R^{n-1} durch 2 Gleichungen beschrieben. Sei U_{ijk} der Raum, längs dessen sich die MS-HE H_{ij}, H_{ik} und H_{jk} schneiden. Der Schnitt $E \cap U_{ijk}$ ist durch n-3+2 Gleichungen gegeben. Es treten damit die folgenden Fälle auf:

a) Die beiden Gleichungen von U_{ijk} sind im System der Gleichungen für E enthalten. Dann gilt: $E \cap U_{ijk} = E$, d.h. E ist in jedem der 3 MS-HE H_{ij}, H_{ik} und H_{jk} enthalten, also Widerspruch zur Voraussetzung.

b) Eine der n-1 Gleichungen von $E \cap U_{ijk}$ ist linear abhängig von den übrigen. Dann ist $E \cap U_{ijk} = G_{ijk}$ eine Gerade im R^{n-1}. Längs U_{ijk} schneiden sich nach Voraussetzung die MS-HE H_{ij}, H_{ik} und H_{jk}, d.h. G_{ijk} ist die gemeinsame Schnittgerade von E mit den 3 MS-HE, d.h. auf E fallen die 3 Geraden $E \cap H_{ij} = G_{ij}$, $E \cap H_{ik} = G_{ik}$ und $E \cap H_{jk} = G_{jk}$ zu einer Geraden G_{ijk} zusammen.

c) Die n-1 Gleichungen des Schnitts $E \cap U_{ijk}$ sind linear unabhängig. Dann ist $E \cap U_{ijk}$ ein Punkt p_{ijk} auf E.

Es ist $E \cap U_{ijk} = E \cap (H_{ij} \cap H_{ik} \cap H_{jk})$. Wie wir in den Beispielen gesehen haben, gibt es zwei Typen von MS-HE-Gleichungen: $x_i = \frac{1}{2}$ oder $x_i = x_j$. Dementsprechend gibt es auch zwei Typen von Gleichungssystemen für die U_{ijk}:

U_{ijk}: $x_i = x_j$, $x_i = x_k$ und $x_j = x_k$

oder U_{ijk}: $x_i = \frac{1}{2}$, $x_j = \frac{1}{2}$ und $x_i = x_j$, für k = o

Es sei U_{ijk} vom ersten Typ und oBdA: i = 1, j = 2, k = 3 also

U_{123}: $x_1 = x_2 = x_3$.

Sei E definiert durch:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots & \\ a_{n-3,1}x_1 + \ldots + a_{n-3,n-1}x_{n-1} + a_{n-3,n} &= 0 \end{aligned}$$

Dann ist der Schnitt $E \wedge H_{ij}$ definiert durch:

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{12})x_1 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots & \\ (a_{n-3,1} + a_{n-3,2})x_1 + a_{n-3,3}x_3 + \ldots + a_{n-3,n} &= 0 \end{aligned}$$

analog $E \wedge H_{ik}$ und $E \wedge H_{jk}$.

Dann ist nach Konstruktion $(E \wedge H_{ij}) \wedge (E \wedge H_{ik}) \wedge (E \wedge H_{jk}) = E \wedge U_{ijk}$, d.h. die Schnittpunkte von H_{ij}, H_{ik} und H_{jk} liegen in U_{ijk} genau dann, wenn die Schnittpunkte von $E \wedge H_{ij}$, $E \wedge H_{ik}$ und $E \wedge H_{jk}$ in $E \wedge U_{ijk}$ liegen.

Die gleichen Oberlegungen gelten für den anderen Typ von Gleichungen für U_{ijk}.

Damit haben wir: $E \wedge U_{ijk}$ ist ein Punkt $\Longleftrightarrow$ die Geraden $G_{ij} = E \wedge H_{ij}$, $G_{ik} = E \wedge H_{ik}$ und $G_{jk} = E \wedge H_{jk}$ schneiden sich auf E im 3-fachen Punkt p_{ijk}.

d) Die n-1 Gleichungen des Schnitts $E \wedge U_{ijk}$ sind widersprüchlich, d.h. $E \wedge U_{ijk} = \mathscr{O}$. Nach dem oben hergeleiteten ist dies äquivalent zu: $(E \wedge H_{ij}) \wedge (E \wedge H_{ik}) \wedge (E \wedge H_{jk}) = \mathscr{O}$, d.h. die Geraden G_{ij}, G_{ik} und G_{jk} liegen parallel auf E.

B) Die $\binom{n}{2}$ MS-HE H_{ij} schneiden sich ausserdem noch in $3\binom{n}{4}$ (n-3)-dimensionalen Unterräumen $U_{ijkl} = H_{ij} \wedge H_{kl}$, i,j,k,l alle verschieden.

Der Schnitt $E \wedge U_{ijkl}$ ist wieder durch n-3 + 2 Gleichungen gegeben und wir unterscheiden die Fälle:

a) $E \cap U_{ijkl} = E$, d.h. E liegt in U_{ijkl} und damit in beiden MS-HE H_{ij} und H_{kl}.

b) $E \cap U_{ijkl} = G$ eine Gerade in E, d.h. die Geraden $E \cap H_{ij}$ und $E \cap H_{kl}$ fallen auf E zusammen.

c) $E \cap U_{ijkl} = p_{ijkl}$ ein Punkt auf E, in dem sich die Geraden $E \cap H_{ij}$ und $E \cap H_{kl}$ schneiden.

d) $E \cap U_{ijkl} = \emptyset$, d.h. die Geraden $E \cap H_{ij}$ und $E \cap H_{kl}$ haben auf E keinen gemeinsamen Schnittpunkt, sie liegen also parallel!

C) Wie wir in den Beispielen gesehen haben, schneiden sich die $\binom{n}{2}$ MS-HE noch zu je $\binom{n-i}{2}$ in einem i-dimensionalen Unterraum für i = o,1,..,n-3.
Ist E eine affine Ebene, deren Schnitt mit einem solchen i-dimensionalen Schnittraum nicht leer ist, so schneiden sich auf E $\binom{n-i}{2}$ Geraden in einem Punkt, oder es liegen $\binom{n-i}{2}$ Geraden parallel.
Nennen wir alle diese i-dimensionalen Räume, längs derer sich $\binom{n-i}{2}$ MS-HE Schneiden, die *höheren Symmetrieräume von* K_n^*.
Da wir für unsere Untersuchungen nur an ebenen Entfaltungs-Konfigurationen i.a.L. interessiert sind, wollen wir natürlich vermeiden, daß die affinen Ebenen einen nicht-leeren Schnitt mit diesen höheren Symmetrieräumen haben.

Definition 4.2.7 Sei E eine affine Ebene im R^{n-1}.

Dann liegt E *nicht-symmetrisch* zu K_n^* genau dann, wenn gilt:

i) $E \cap U_{ijk} = p_{ijk}$ ein Punkt auf E für alle i,j,k verschieden

ii) $E \cap U_{ijkl} = p_{ijkl}$ ein Punkt auf E für alle i,j,k,l verschieden

iii) Der Schnitt von E mit allen höheren Symmetrieräumen zu K_n^* ist leer.

Bemerkung: Soll E nicht-symmetrisch zu K_n^* liegen, so folgt insbesondere, daß E eine affine Ebene sein muß, also nicht durch den Ursprung im R^{n-1} gehen darf, da es immer einen höheren Symmetrieraum $V = (x_1,\ldots,x_1)$ gibt, der die 0 enthält.

Wir erhalten den folgenden Satz:

Satz 4.2.8 Sei E eine affine Ebene im R^{n-1}, H_{ij} die MS-HE zu K_n^*.

Dann gilt:

i) Liegt E nicht-symmetrisch zu K_n^*, so ist $E \cap \bigcup_{i<j} H_{ij}$ ein Geradensystem von $\binom{n}{2}$ Geraden auf E mit genau $\binom{n}{3}$ verschiedenen 3-fachen und $3\binom{n}{4}$ verschiedenen 2-fachen Schnittpunkten.

ii) Liegt E symmetrisch zu K_n^*, so ist $E \cap \bigcup_{i<j} H_{ij}$ ein Geradensystem auf E mit parallelen und/oder mehrfachen Geraden und/oder höheren Schnittpunkten.

Aus diesem Satz ergibt sich unmittelbar eine Aussage über die Anzahl von Rangfolgengebieten, die durch eine affine Ebene aus $\mathcal{R}_{K_n^*}$ herausgeschnitten werden:

Korollar 4.2.9 $$\left| E \cap \mathcal{R}_{K_n^*} \right| \leq \tfrac{1}{2}\binom{n}{2}\cdot\left[\binom{n}{2} + 1\right] + 1 - \binom{n}{3}$$

Beweis: Die von E aus $\mathcal{R}_{K_n^*}$ herausgeschnittenen Rangfolgengebiete liegen zwischen den Geraden $E \cap H_{ij}$ auf E. Wieviele solcher Gebiete es auf E gibt, hängt von der Geraden-Konfiguration und ihrem Schnittverhalten untereinander ab (vgl. den Beweis zu Lemma 2.2.1).

q.e.d.

Damit erfüllen die affinen Ebenen im R^{n-1}, die wir ja zur Komplettierung eines vorgegebenen unvollständigen Rangfolgensystems heranziehen wollen, eine erste notwendige Voraussetzung: affine Ebenen schneiden aus $\mathfrak{R}_{K_n^*}$ die richtige Anzahl von Rangfolgengebieten heraus!

4.3 Geradensysteme als Schnitte von affinen Ebenen mit der Konfiguration der Mittelsenkrecht-Hyperebenen zu K_n^* im R^{n-1}

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß zu K_n^* nicht-symmetrische, affine Ebenen aus $\bigcup_{i<j} H_{ij}$ eine Konfiguration von $\binom{n}{2}$ Geraden herausschneiden, die verschieden sind und sich in genau $\binom{n}{3}$ verschiedenen 3-fachen und $3\binom{n}{4}$ verschiedenen 2-fachen Schnittpunkten schneiden. Das bedeutet, daß für zu K_n^* nichtsymmetrische, affine Ebenen E gilt: $\left| E \cap \mathfrak{R}_{K_n^*} \right| = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2} + 1 \right) + 1 - \binom{n}{3}$

Wir wissen allerdings noch nicht, ob $\mathfrak{R} := E \cap \mathfrak{R}_{K_n^*}$ für alle n ein darstellbares Rangfolgensystem ist, d.h. ob es zu $\mathfrak{R}$ auf E immer eine Konfiguration K_n^E von n Punkten gibt, so daß $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{K_n^E}$ gilt. Dieser Frage wollen wir in disem Abschnitt nachgehen.

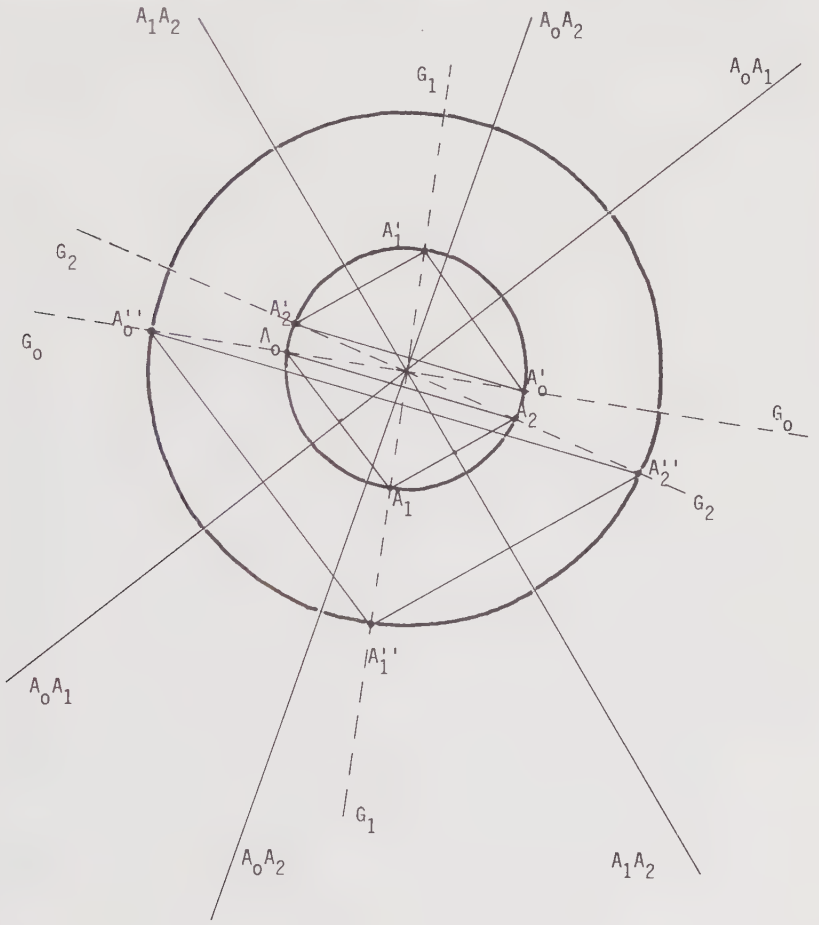
Betrachten wir Geradensysteme im R^2 mit genau $\binom{n}{3}$ verschiedenen 3-fachen und $3\binom{n}{4}$ verschiedenen 2-fachen Schnittpunkten.

Fall A): $n = 3$

Die $\binom{3}{2} = 3$ Geraden A_0A_1, A_0A_2 und A_1A_2 gehen durch den Punkt p_{012}, den Mittelpunkt des Umkreises zum Dreieck $A_0A_1A_2$, d.h. 3 Geraden durch einen Punkt sind immer Mittelsenkrechten zu 3 Punkten A_0, A_1, A_2.

Die Lösungsmenge, d.h. die Menge der möglichen Konfigurationen von 3 Punkten, die die 3 vorgegebenen Geraden als Mittelsenkrechten haben, sieht wie folgt aus:

Es gibt beliebig viele ähnliche Dreiecke mit A_oA_1, A_oA_2 und A_1A_2 als Mittelsenkrechten. Die Eckpunkte dieser Dreiecke liegen auf Geraden G_i durch p_{o12} und sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit verschiedenen Umkreisen ; auf jedem festen Umkreis gibt es 2 mögliche Dreiecke:



Fall B): n = 4

Die $\binom{4}{2}$ = 6 Geraden schneiden sich in 4 dreifachen Punkten p_{o12}, p_{o13}, p_{o23} und p_{123}. Es sei eine Konfiguration von 3 Punkten mit 3 Mittelsenkrechten gegeben, und damit auch der dreifache Punkt p_{o12}.

Die Gerade A_oA_3 bzgl des vierten Punktes A_3 sei beliebig gezeichnet.

Die Schnittpunkte von A_oA_3 mit den Geraden A_oA_1 und A_oA_2 definieren eindeutig die Lage von zwei neuen 3-fachen Punkten p_{o13} und p_{o23}. Der ungünstigste Fall ist nun, daß die Gerade A_1A_3 durch p_{o13} so gezeichnet wird, daß die resultierende Lagemöglichkeit des vierten Punktes A_3 im Widerspruch steht zur Lagemöglichkeit bzgl der Geraden A_oA_3 (wenn man die Geraden A_oA_3 und A_1A_3 als Mittelsenkrechtenbzgl der Punkte A_o und A_3 bzw A_1 und A_3 ansieht.).

Zeichnen wir also A_1A_3 so, daß der Punkt A_3 auf der entgegengesetzten Seite liegen muß, wie von A_oA_3 angezeigt ist.

Wir wissen: alle möglichen Lösungen für n = 3 liegen auf den Geraden G_i durch den Punkt p_{o12} und die spezielle Lösung A_o, A_1, A_2. Spiegeln wir nun die Geraden G_o, G_1, G_2 an den Geraden A_oA_3, A_1A_3 und A_2A_3, so erhalten wir Geraden G_o^3, G_1^3 und G_2^3, die die Lagemöglichkeiten des Punktes A_3 bzgl A_o, A_1 und A_2 anzeigen. Wie man leicht anhand einer Zeichnung nachvollziehen kann: auch in unserem ungünstigsten Fall schneiden sich die Geraden G_i^3 in einem Punkt A_3.

Die eindeutige Konfiguration der 4 Punkte zum vorgegebenen Geradensystem erhalten wir nun als Schnitte der Geraden senkrecht auf A_oA_3, A_1A_3 und A_2A_3 mit den Geraden G_o, G_1 und G_2.

Damit gilt:

> Jedes Geradensystem von $\binom{4}{2}$ = 6 Geraden mit genau $\binom{4}{3}$ = 4 dreifachen Schnittpunkten ist in eindeutiger Weise ein System von 6 Mittelsenkrechten bzgl 4 Punkten im R^2.

Mit Fall A und B erhalten wir:

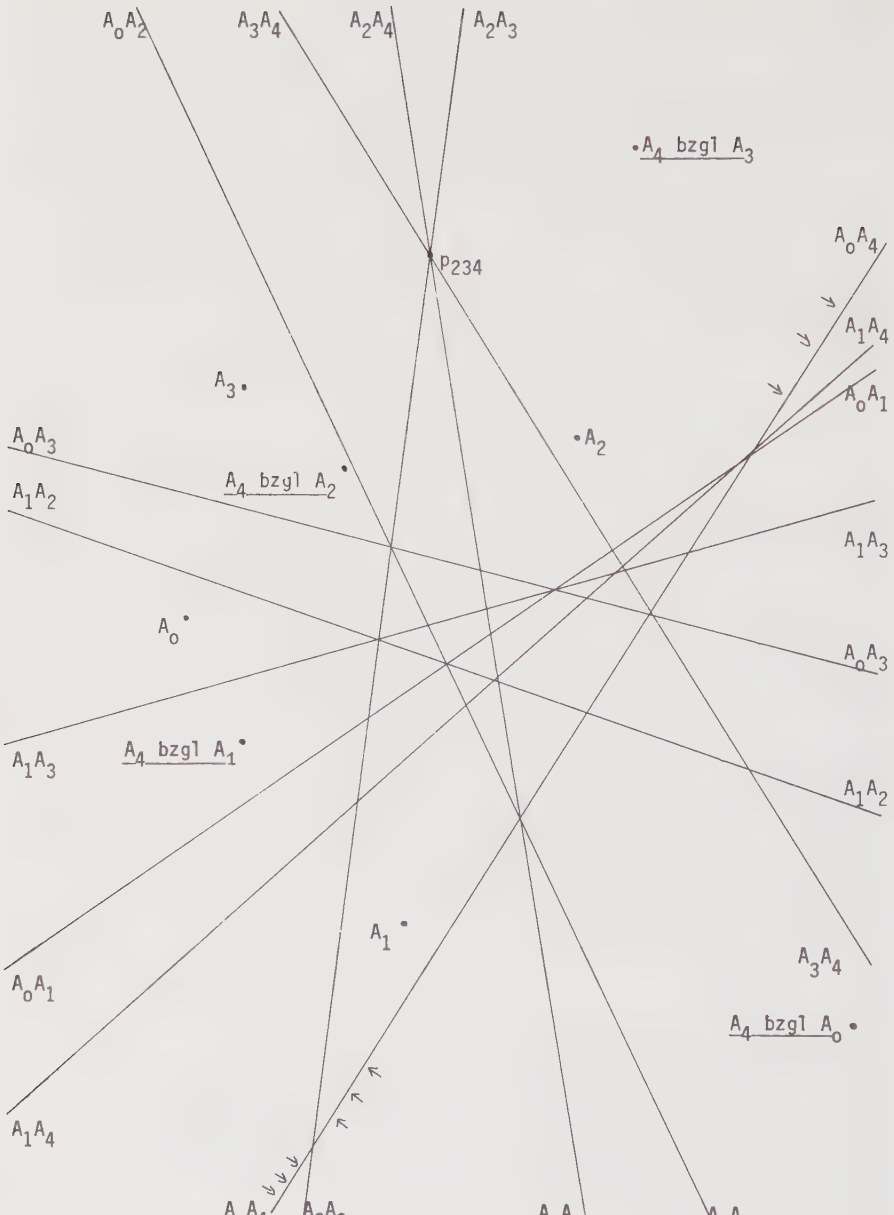
Satz 4.3.1 Für n = 3,4 ist jedes ebene Geradensystem von $\binom{n}{2}$ Geraden mit genau $\binom{n}{3}$ dreifachen Schnittpunkten eine Mittelsenkrechten-Konfiguration bzgl 3 bzw 4 Punkten im R^2.

Korollar 4.3.2 Ist E eine affine Ebene im R^{n-1}, nicht-symmetrisch zu K_n^*, so gilt:

Für n = 3,4 ist $\mathfrak{R} = E \cap \mathfrak{R}_{K_n^*}$ ein darstellbares Rangfolgensystem.

Fall C) n = 5

Die $\binom{5}{2}$ = 1o Geraden schneiden sich in $\binom{5}{3}$ = 1o dreifachen Schnittpunkten. Es sei eine Lösung für 4 der 5 Punkte konstruiert; wir haben also eine Konfiguration A_o, A_1, A_2, A_3 mit dem zugehörigen Mittelsenkrechten-System. Auf der ersten neuen Geraden A_oA_4 liegen 3 neue dreifach-Punkte: p_{o14}, p_{o24} und p_{o34}. Durch Hinzunahme eines weiteren Punktes p_{234} an beliebiger Stelle auf A_2A_3 ist die Lage der restlichen 3 Geraden A_1A_4, A_2A_4 und A_3A_4 festgelegt. Durch die so konstruierte Konfiguration der 1o Geraden erhalten wir aber vier verschiedene Lagen des Punktes A_4 (vgl Zeichnung). Aus Fall B wissen wir, daß die Lage der 4 vorgegebenen Punkte A_o, A_1, A_2, A_3 fest ist und nicht variiert werden kann (für n = 4 ist die Lösung immer eindeutig!), d.h. wir haben unter der Bedingung, daß die 1o Geraden ihre Lage nicht ändern dürfen, keine Möglichkeit der Korrektur der Lage der 5 Punkte hinsichtlich einer Lösung. Damit haben wir für n = 5 eine beliebige Konfiguration von 1o Geraden mit genau 1o dreifachen Schnittpunkten konstruiert, die keine Mittelsenkrechten-Konfiguration bzgl 5 Punkten ist.


A_0A_2
A_3A_4
A_2A_4
A_2A_3
A_4 bzgl A_3
P_{234}
A_0A_4
A_1A_4
A_0A_1
A_3
A_2
A_0A_3
A_4 bzgl A_2
A_1A_2
A_1A_3
A_0
A_0A_3
A_1A_3
A_4 bzgl A_1
A_1A_2
A_1
A_3A_4
A_0A_1
A_4 bzgl A_0
A_1A_4
A_0A_4
A_2A_3
A_2A_4
A_0A_2

An dieser Situation ändert sich gewiß auch nichts mehr für $n \geqslant 5$: die Zwänge an Mittelsenkrechten-Konfigurationen werden immer größer.
Damit erhalten wir:

Satz 4.3.3 Für $n \geqslant 5$ sind ebene Geradensysteme von $\binom{n}{2}$ Geraden mit $\binom{n}{3}$ dreifachen Schnittpunkten im allgemeinen keine Mittelsenkrechten-Konfigurationen bzgl n Punkten.

Um das Entfaltungsproblem für $n \geqslant 5$ lösen zu können, müssen wir uns also die Schnitte einer affinen Ebene mit der Mittelsenkrecht-Hyperebenen-Konfiguration von K_n^* im R^{n-1} genauer ansehen und untersuchen, unter welchen Bedingungen diese Geradensysteme ebene Mittelsenkrechten-Konfigurationen sein können.
Dies wird im folgenden Abschnitt geleistet.

4.4 Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an affine Ebenen im R^{n-1} zur Darstellbarkeit ebener Rangfolgensysteme

Wir betrachten in diesem Abschnitt affine Ebenen in vektorieller Darstellung im R^{n-1} und bestimmen aus dieser Darstellung die Gleichungen der Schnitte mit den Mittelsenkrecht-Hyperebenen (MS-HE) zu K_n^* als Geraden auf der affinen Ebene. Dann vergleichen wir die Koeffizienten dieser Geradengleichungen mit den Koeffizienten der Mittelsenkrechten einer beliebigen Konfiguration auf der affinen Ebene und ermitteln so Bedingungen, unter denen das herausgeschnittene Geradensystem ein Mittelsenkrechtensystem auf der affinen Ebene ist.

Wir zeigen, daß diese Bedingungen an affine Ebenen notwendig und hinreichend sind für die Darstellbarkeit von ebenen vollständigen Rangfolgensystemen.

Sei $(u, v, z_1, \ldots, z_{n-3})$ eine beliebige Basis des R^{n-1}. Dann kann man den R^{n-1} zerlegen in die direkte Summe: $R^{n-1} = E + Z$, $E = \text{Spann}(u,v)$, $Z = \text{Spann}(z_1,\ldots,z_{n-3})$, und die Darstellung jedes Vektors $x \in R^{n-1}$ durch $x = e + z$ ist eindeutig.

Ist $z \in Z$ ein beliebiger Vektor $\neq 0$, so ist durch $z+E$ ein zweidimensionaler, affiner Unterraum des R^{n-1} gegeben, eine affine Ebene im R^{n-1}.

Jedes Element e von $z+E$ hat als Vektor des R^{n-1} die Darstellung:

$$e = z + au + bv, \quad a,b \in R,$$

d.h. hinsichtlich der Basis u,v von E entsprechen Vektoren in $z+E$ als Elemente des R^{n-1} umkehrbar eindeutig Koordinatentupeln (a,b), den Punkten in $z+E$.

Den Abstand zwischen zwei Punkten $A_1 = (a_1,b_1)$ und $A_2 = (a_2,b_2)$ auf $z+E$ definieren wir über das kanonische Skalarprodukt in E:

$$d^2(A_1,A_2) := \left\| \overrightarrow{A_1 - A_2} \right\|^2 = \langle \overrightarrow{A_1-A_2}, \overrightarrow{A_1-A_2} \rangle = (a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2.$$

Die Mittelsenkrechte zwischen A_1 und A_2 ist definiert durch:

$$M_{12} = \left\{ P \in z+E \;\middle|\; d(P,A_1) = d(P,A_2) \right\}.$$

Hat P die Koordinatendarstellung $P = (x,y)$ in $z+E$, so gilt für M_{12}:

$$\begin{aligned} & d^2(P,A_1) = d^2(P,A_2) \\ \Longleftrightarrow\quad & (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2(a_2-a_1)x + a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 = 2(b_1-b_2)y \\ \Longleftrightarrow\quad & y = \frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}\, x - \frac{a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2}{2(b_1-b_2)} \end{aligned}$$

Sei nun K_n eine Konfiguration von n Punkten i.a.L. auf $z+E$. Sei K_n oBdA so gewählt, daß der erste Punkt A_0 im Ursprung liegt, also

$K_n = (A_o = (o,o);\ A_j = (a_j b_j),\ j = 1,\ldots,n-1)$ in der Koordinatendarstellung bzgl der schiefwinkligen Basis u,v von E. Dann erhalten wir für die Mittelsenkrechten zu A_i, A_j aus K_n die beiden Typen von Gleichungen:

$$M_{oj}: \quad y = -\frac{a_j}{b_j}x + \frac{a_j^2 + b_j^2}{2b_j} \qquad \text{für } j = 1,\ldots,n-1$$

$$M_{ij}: \quad y = \frac{a_j - a_i}{b_i - b_j}x - \frac{a_j^2 - a_i^2 + b_j^2 - b_i^2}{2(b_i - b_j)} \qquad i \neq o,\ i < j$$

Betrachten wir nun die Standard-Konfiguration K_n^* im R^{n-1} mit der Basis $(u,v,z_1,\ldots,z_{n-3})$. Ist die Koordinatendarstellung der Punkte von K_n^* wieder $A_o = (o,\ldots,o)$, A_i ($o,..,o,\underset{i}{1},o,..,o$), nun aber bzgl der Basis $(u,v,z_1,\ldots,z_{n-3})$, so gilt für die Mittelsenkrecht-Hyperebenen zu K_n^* :

$$H_{ij} = \left\{ x = x_1u + x_2v + x_3z_1 + \ldots + x_{n-1}z_{n-3} \;\middle|\; d(x,A_i) = d(x,A_j) \right\}$$

Definieren wir den Abstand wieder durch:

$d^2(x,y) = \| x - y \|^2 = \langle x-y, x-y \rangle := \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - y_i)^2$, so erhalten wir:

H_{oj} ist bzgl der Basis $(u,v,z_1,\ldots,z_{n-3})$ definiert durch: $x_j = \frac{1}{2}$ für $j = 1,\ldots,n-1$

H_{ij} ist bzgl der Basis $(u,v,z_1,\ldots,z_{n-3})$ definiert durch: $x_i = x_j$ für $i < j$, $i = 1,\ldots,n-1$.

Dann sind die Schnitte $(z+E) \cap H_{ij}$ definiert durch:

$$(z+E) \cap H_{oj} = \left\{ w = z + xu + yv \;\middle|\; w_j = \frac{1}{2} \right\}$$

$$(z+E) \cap H_{ij} = \left\{ w = z + xu + yv \;\middle|\; w_i = w_j \right\}$$

Damit erhalten wir die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Geraden $G_{ij} := (z+E) \cap H_{ij}$ auf z+E:

$$G_{oj}: \quad y = -\frac{u_j}{v_j}x + \frac{1-2z_j}{2v_j} \quad \text{für } j = 1,\ldots,n-1$$

$$G_{ij}: \quad y = \frac{u_j - u_i}{v_i - v_j}x + \frac{z_j - z_i}{v_i - v_j} \quad \text{für } i \neq o,\ i < j$$

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen diese Geraden als Schnitte von z+E mit den MS-HE von K_n^* Mittelsenkrechten einer Konfiguration K_n auf z+E sind. Da sowohl die Geradengleichungen der $G_{ij} = (z+E)\cap H_{ij}$ wie die Gleichungen der Mittelsenkrechten M_{ij} sich auf dasselbe schiefwinklige Koordinatensystem u,v in z+E beziehen, können wir die Koeffizienten von G_{ij} und M_{ij} vergleichen.

A) Vergleich der Koeffizienten von G_{oj} und M_{oj}

Durch Gleichsetzen von G_{oj} mit M_{oj} erhalten wir die Beziehungen:

$$1)\ \frac{u_j}{v_j} = \frac{a_j}{b_j} \quad \text{und} \quad 2)\ \frac{a_j^2 + b_j^2}{2b_j} = \frac{1-2z_j}{2v_j}$$

$$1) \Rightarrow u_j b_j = v_j a_j \Longleftrightarrow b_j = \frac{v_j}{u_j} a_j$$

Einsetzen in 2) ergibt:

$$\frac{\frac{(u_j^2 + v_j^2)}{u_j^2} a_j^2}{2\frac{v_j}{u_j} a_j} = \frac{1-2z_j}{2v_j} \Longleftrightarrow \frac{(u_j^2 + v_j^2)\, a_j}{2v_j u_j} = \frac{1-2z_j}{2v_j}$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_j = \frac{(1-2z_j)u_j}{u_j^2 + v_j^2} \qquad \Longrightarrow \quad b_j = \frac{(1-2z_j)v_j}{u_j^2 + v_j^2}$$

Mit diesen Werten für a_j und b_j ist also G_{oj} Mittelsenkrechte zu $A_o = (o,o)$

und $A_j = (a_j, b_j)$ auf $z+E$ für alle $j = 1,\ldots,n-1$.

B) Vergleich der Koeffizienten von G_{ij} und M_{ij}

Setzt man für a_j, b_j und a_i, b_i die oben bestimmten Werte in M_{ij} ein, so erhält man:

$$M_{ij}: y = \frac{\frac{(1-2z_j)}{u_j^2+v_j^2}u_j - \frac{(1-2z_i)}{u_i^2+v_i^2}u_i}{\frac{(1-2z_i)}{u_i^2+v_i^2}v_i - \frac{(1-2z_j)}{u_j^2+v_j^2}v_j}\,x - \frac{\frac{(u_j^2+v_j^2)(1-2z_j)^2}{(u_j^2+v_j^2)^2} - \frac{(u_i^2+v_i^2)(1-2z_i)^2}{(u_i^2+v_i^2)^2}}{2\left(\frac{1-2z_i}{u_i^2+v_i^2}v_i - \frac{1-2z_j}{u_j^2+v_j^2}v_j\right)}$$

Der Koeffizientenvergleich mit G_{ij} ergibt:

$$1)\quad \frac{\frac{(1-2z_j)}{u_j^2+v_j^2}u_j - \frac{(1-2z_i)}{u_i^2+v_i^2}u_i}{\frac{(1-2z_i)}{u_i^2+v_i^2}v_i - \frac{(1-2z_j)}{u_j^2+v_j^2}v_j} = \frac{u_j-u_i}{v_i-v_j}$$

$$2)\quad \frac{\frac{(1-2z_i)^2}{u_i^2+v_i^2} - \frac{(1-2z_j)^2}{u_j^2+v_j^2}}{2\left(\frac{(1-2z_i)}{u_i^2+v_i^2}v_i - \frac{(1-2z_j)}{u_j^2+v_j^2}v_j\right)} = \frac{z_j-z_i}{v_i-v_j}$$

$$1) \Longleftrightarrow \left(\frac{1-2z_j}{u_j^2+v_j^2}u_j - \frac{1-2z_i}{u_i^2+v_i^2}u_i\right)(v_i-v_j) = \left(\frac{1-2z_i}{u_i^2+v_i^2}v_i - \frac{1-2z_j}{u_j^2+v_j^2}v_j\right)(u_j-u_i)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{1-2z_j}{u_j^2+v_j^2} - \frac{1-2z_i}{u_i^2+v_i^2}\right)(u_jv_i - u_iv_j) = 0\,.$$

$u_jv_i - u_iv_j = 0 \Longleftrightarrow \frac{u_j}{v_j} = \frac{u_i}{v_i}$, d.h. die Geraden M_{oi} und M_{oj} haben dieselbe Steigung für alle $i < j$, die resultierende Konfiguration wäre also in spezieller Lage. Wir erhalten also die Bedingung:

$$\frac{1 - 2z_j}{u_j^2 + v_j^2} = \frac{1 - 2z_i}{u_i^2 + v_i^2} \quad \text{für alle } (i,j) \text{ mit } i < j, \text{ d.h.}$$

$$\frac{1 - 2z_j}{u_j^2 + v_j^2} = s \quad \text{für alle } j = 1,\ldots,n-1, \; S \neq 0.$$

Setzen wir diese Bedingung in die Gleichung 2) des Vergleichs von G_{ij} mit M_{ij} ein, so ergibt sich:

$$\frac{s(1-2z_i) - s(1-2z_j)}{2(sv_i - sv_j)} = \frac{z_j - z_i}{v_i - v_j}$$

$$\Longleftrightarrow (1 - 2z_i - 1 + 2z_j)(v_i - v_j) = 2(v_i - v_j)(z_j - z_i)$$

$$\Longleftrightarrow 2(z_j - z_i)(v_i - v_j) = 2(v_i - v_j)(z_j - z_i),$$

d.h. mit der zusätzlichen Bedingung $\frac{1-2z_j}{u_j^2+v_j^2} = s$ für alle $j = 1,\ldots,n-1$ ist auch G_{ij} Mittelsenkrechte zwischen A_i und A_j bzgl der oben bestimmten Werte für a_i,b_i und a_j,b_j.

$$\frac{1 - 2z_j}{u_j^2 + v_j^2} = s \Longleftrightarrow z_j = \frac{1 - s(u_j^2 + v_j^2)}{2} \quad \text{für } j = 1,\ldots,n-1$$

und ein so bestimmter Vektor $z = (z_1,\ldots,z_{n-1})$ ist im allgemeinen linear unabhängig von u und v. Unsere Überlegungen und Berechnungen führen zum folgenden Satz:

Satz 4.4.1 Seien u,v linear unabhängige Vektoren im R^{n-1}, $E = \text{Spann}(u,v)$; sei $z = (z_1,\ldots,z_{n-1})$ bestimmt durch $z_j = \frac{1 - (u_j^2 + v_j^2)}{2}$.
Dann gilt für die so definierte affine Ebene z+E im R^{n-1}:
$(z+E) \cap \mathfrak{R}_{K_n^*}$ ist ein darstellbares Rangfolgensystem und die zugehörige Konfiguration hat die Gestalt: $A_o = (o,o)$, $A_j = (u_j,v_j)$, $j = 1,\ldots,n-1$.

Beweis: Mit dem im Satz bestimmten z ist nach unseren bisherigen Überlegungen für die affine Ebene z+E der Schnitt $(z+E) \cap (\bigcup_{i<j} H_{ij})$ ein Mittelsenkrechtensystem von $\binom{n}{2}$ Mittelsenkrechten auf z+E, d.h. zu dem Rangfolgensystem $(z+E) \cap \mathfrak{R}_{K_n^*}$, das von den Geraden $(z+E) \cap H_{ij}$ durch Zerlegung von z+E gebildet wird, gibt es eine Konfiguration auf z+E. Diese Konfiguration ist nach Konstruktion gerade die im Satz beschriebene $K_n = (A_o = (o,o), A_j = (u_j, v_j))$ und es gilt: $(z+E) \cap \mathfrak{R}_{K_n^*} = \mathfrak{R}_{K_n}$.

q.e.d.

Wir haben bisher die Geraden und Konfigurationspunkte als Geraden und Punkte auf einer affinen Ebene im R^{n-1} bestimmt, d.h. bzgl einer Basis von Vektoren des R^{n-1}. Die Abbildung $F: z+E \longrightarrow R^2$, mit $z+ a_1u + a_2v \longrightarrow (a_1,a_2)$ ist eine isometrische Abbildung zwischen der Ebene z+E und dem R^2 mit der rechtwinkligen Standardbasis e_1, e_2.

Insbesondere wird durch F eine Konfiguration mit ihrem Mittelsenkrechtensystem auf z+E umkehrbar eindeutig in eine Konfiguration mit Mittelsenkrechtensystem im R^2 überführt, d.h. wir können die durch z+F bestimmte Konfiguration als Entfaltungskonfiguration mit Mittelsenkrechtensystem im 'normalen' R^2 interpretieren.

Verdeutlichen wir dieses Ergebnis in einem Beispiel:

Beispiel 4.4.2 Es seien die beiden linear unabhängigen Vektoren

u = (14, 16, 8, 11, 2) und v = (13, 6, 10, 6, 11) gegeben. Dann ist z durch die Formel $z_j = \frac{1 - u_j^2 - v_j^2}{2}$ gegeben :

z = (-182, -145.5, -81.5, -78, -62)

Die Gleichungen der Geraden G_{ij} als Schnitte der so definierten affinen Ebene z+E mit den MS-HE H_{ij} der Standard-Konfiguration im R^5 ergeben sich aus:

$$G_{oj}: \quad y = -\frac{u_j}{v_j}x + \frac{1-2z_j}{2v_j} \quad ; \quad \text{und} \quad G_{ij}: \quad y = \frac{u_j-u_i}{v_i-v_j}x + \frac{z_j-z_i}{v_i-v_j}$$

und wir erhalten:

G_{o1} : y = -1.08x + 14.04 ; G_{o2} : y = -2.67x + 24.33

G_{o3} : y = -0.80x + 8.2 ; G_{o4} : y = -1.83x + 13.08

G_{o5} : y = -0.18x + 5.68 ;

G_{12} : y = 0.29x + 5.21 ; G_{13} : y = -2x + 33.5

G_{14} : y = -0.43x + 14.86 ; G_{15} : y = -6x + 60

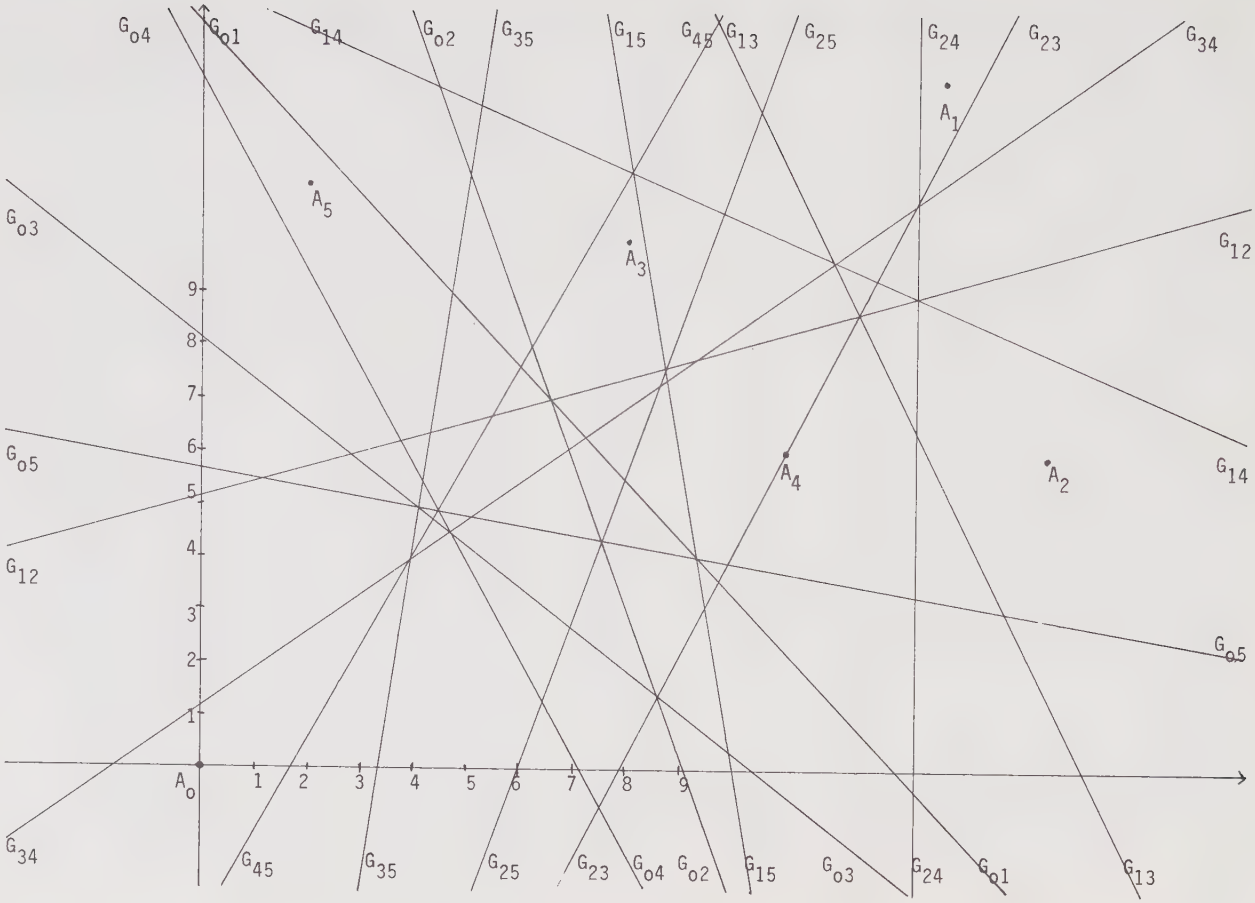
G_{23} : y = 2x - 16 ; G_{24} : x = 13.5

G_{25} : y = 2.8x - 16.7 ; G_{34} : y = 0.75x + 0.88

G_{35} : y = 6x - 19.5 ; G_{45} : y = 1.8x - 3.2

Zeichnen wir diese Geraden und die durch $A_o = (o,o)$, $A_j = (u_j, v_j)$ definierte Konfiguration K_n in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so erhalten wir: Die Geraden G_{ij} sind die Mittelsenkrechten der Konfiguration K_n von 6 Punkten. (vgl die Zeichnung auf der folgenden Seite).

Die resultierende Konfiguration K_n = ((o,o), (14,13), (16,6), (8,10), (11,6), (2,11)) ist gerade die Konfiguration des Beispiels von Abschnitt 2.1, Seite 32. Wir haben also eine affine Ebene gefunden, deren Schnitt mit $\mathcal{R}_{K_6^*}$ im R^5 gerade das Rangfolgensystem der Konfiguration von Seite 32 ergibt!


G_{o4}
G_{o1}
G_{14}
G_{o2}
G_{35}
G_{15}
G_{45}
G_{13}
G_{25}
G_{24}
G_{23}
G_{34}
A_1
A_5
A_3
G_{o3}
G_{12}
G_{o5}
A_4
A_2
G_{14}
G_{12}
G_{o5}
G_{34}
A_o
1
2
3
4
5
6
7
8
9
G_{45}
G_{35}
G_{25}
G_{23}
G_{o4}
G_{o2}
G_{15}
G_{o3}
G_{24}
G_{o1}
G_{13}

Definition 4.4.3 Die zulässige Menge $\mathfrak{E}$ von affinen Ebenen im R^{n-1} ist definiert durch:

$$\mathfrak{E} := \Big\{ z+E \in R^{n-1} \;\Big|\; 1)\ z+E \text{ ist nicht-symmetrisch zu } K_n^*$$

2) für den affinen Teil $z = (z_1,\ldots,z_{n-1})$ von $z+E$ gilt: $z_j = \frac{1 - u_j^2 - v_j^2}{2}$, $j = 1,\ldots,n-1$, wo $E = \text{Spann}(u,v)$, u,v linear unabhängige Vektoren im R^{n-1} sind.$\Big\}$

Dann können wir das Hauptergebnis dieses Kapitels formulieren:

Satz 4.4.4 Sei $\mathfrak{E}$ die zulässige Menge von affinen Ebenen im R^{n-1}; sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiges vollständiges Rangfolgensystem.

Dann gilt:

$\mathfrak{R}$ ist darstellbar im R^2 bzgl der kanonischen Basis genau dann, wenn es ein $z+E$ aus $\mathfrak{E}$ gibt mit $\mathfrak{R} = (z+E) \cap \mathfrak{R}_{K_n^*}$.

Beweis: "$\Longleftarrow$" Satz 4.4.1 und die daran anschließenden Überlegungen.

"$\Longrightarrow$" Sei $\mathfrak{R}$ ein darstellbares vollständiges Rangfolgensystem. Dann gibt es eine Konfiguration K_n von n Punkten i.a.L. im R^2 mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{K_n}$.
Durch eine Translation, die $\mathfrak{R}_{K_n}$ unverändert läßt, kann man immer erreichen, daß der erste Punkt A_o von K_n im Ursprung liegt.
Sei also oBdA $K_n = (A_o = (o,o),\ A_j = (a_j,b_j),\ j = 1,\ldots,n-1)$.
K_n i.a.L. $\Longrightarrow$ die Vektoren $a = (a_1,\ldots,a_{n-1})$ und $b = (b_1,\ldots,b_{n-1})$ sind linear unabhängig, d.h. die Vektoren a und b definieren eine Ebene durch $O \in R^{n-1}$.
Bestimmen wir $z = (z_1,\ldots,z_{n-1})$ durch $z_j = \frac{1 - a_j^2 - b_j^2}{2}$, so ist $z+E$ eine affine Ebene aus der zulässigen Menge $\mathfrak{E}$ und nach Konstruktion gilt:
Die Mittelsenkrechten M_{ij} zu K_n sind gerade die Schnitte von $z+E$ mit den

Mittelsenkrecht-Hyperebenen von K_n^* im R^{n-1}.

Damit gilt für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{K_n}$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{K_n} = (z+E) \cap \mathfrak{R}_{K_n^*}$$

q.e.d.

Satz 4.4.4 ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die ebene Darstellung von beliebigen vollständigen Rangfolgensystemen, denn der Zusammenhang von $\widetilde{\mathfrak{K}}_n$ garantiert uns, daß wir nur die Schnitte von z+E mit dem Rangfolgensystem der Konfiguration K_n^* im R^{n-1} betrachten müssen.

4.5 Zusammenfassung: Lösung des Entfaltungsproblems durch zulässige Komplettierung des vorgegebenen unvollständigen Rangfolgensystems

Mit dem in Satz 4.4.4 formulierten notwendigen und hinreichenden Kriterium an affine Ebenen sind wir nun in der Lage, vorgegebene unvollständige Rangfolgensysteme bzgl n Punkten darstellbar zu komplettieren durch Ebenenschnitte $(z+E) \cap \mathfrak{R}_{K_n^*}$, mit z+E aus der zulässigen Menge $\mathfrak{E}$. Damit ist das Problem der zweidimensionalen Entfaltung bei unvollständigen Rangfolgensystemen theoretisch gelöst, denn:

Ist $\{p_1,\ldots,p_m\}$ ein System von Rangfolgen bzgl n Punkten, so gilt nach Satz 4.4.4:

$\{p_1,\ldots,p_m\}$ läßt sich zu einem vollständigen, ebenen, darstellbaren $\mathfrak{R}$ erweitern genau dann, wenn es eine affine Ebene z+E aus $\mathfrak{E}$ gibt mit

$$\mathcal{R} = (z+E) \cap \mathcal{R}_{K_n^*} \supset \{p_1,\ldots,p_m\} \ .$$

Damit ergibt sich der folgende, zunächst theoretische Lösungsalgorithmus:

1) Gegeben ein System $\{p_1,\ldots,p_m\}$ von Rangfolgen bzgl n Punkten,
   $m < \frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2} + 1\right) + 1 - \binom{n}{3}$.
   Betrachte $p_1,\ldots,p_m$ als Rangfolgengebiete der Standard-Konfiguration K_n^* im R^{n-1}.

2) Bestimme Vektoren u,v und z im R^{n-1} so, daß gilt:
   i) die durch u,v,z definierte affine Ebene z+E liegt in $\mathcal{E}$;
   ii) der Schnitt von z+E mit $\mathcal{R}_{K_n^*}$ enthält die Rangfolgen $p_1,\ldots,p_m$ als Gebiete auf z+E.
   Gibt es keine solche Ebene z+E, so sind $p_1,\ldots,p_m$ nicht zweidimensional darstellbar!!

3) Bestimme eine zweidimensionale Konfiguration K_n^2 aus den Koordinaten der errechneten Vektoren u und v.

4) Zu der in 3) bestimmten Konfiguration K_n^2 berechne und zeichne die Lage der vorgegebenen Rangfolgengebiete $p_1,\ldots,p_m$.

Bemerkung: Die größten Schwierigkeiten bei der Umsetzung dieses theoretischen Algorithmus macht sicherlich der Schritt 2), die Bestimmung der Ebene z+E, deren Schnitt mit dem Rangfolgensystem von K_n^* die Rangfolgen $p_1,\ldots,p_m$ enthalten soll. Da jedoch die Gebiete von K_n^* durch relativ einfache Ungleichungen beschrieben sind, sollte die Bestimmung von z+E durch iterative Berechnung von Punkten aus diesen Gebieten und aus z+E möglich sein.

Literaturverzeichnis

[1] F. Bennett/W.L. Hays: Multidimensional unfolding: determining the dimensionality of ranked preference data, Psychometrika vol 25, No 1, 1960

[2] J.D. Carroll: Individual differences and multidimensional scaling, in: Multidimensional Scaling, Theory and Applications in the behavioriral sciences, vol 1, Theory, Seminar Press Inc., New York and London 1972

[3] C.H. Coombs: Psychological scaling without a unit of measurement, Psychological review vol 57, 1950

[4] J.A. Davidson: A geometrical analysis of the unfolding model: nondegenerate solutions, Psychometrika vol 37, No 2, 1972

[5] W. Hartmann: Geometrische Modelle zur Analyse empirischer Daten, Akademie-Verlag, Berlin 1979

[6] W.L. Hays/J.F. Bennett: Multidimensional unfolding: determining configuration from complete rank order preference data, Psychometrika vol 26, No 2, 1961

[7] J.B. Kruskal: Non metric multidimensional scaling, Psychometrika vol 29, 1964

[8] Y. Takane/F.W. Young/J. de Leeuw: Nonmetric individual differences multidimensional scaling: an alternating least squares method with optimal scaling features, Psychometrika vol 42, No 1, 1977

[9] G. Tosstorff: Methoden der geometrischen Datenanalyse und ihre Anwendung bei der Untersuchung des Entwicklungsprozesses, Dissertation, Bonn 1983

Curriculum Vitae

11. 06. 1952	Geboren als Sohn von Therese Brackly, geborene Fischer, und Eduard Brackly in Trier
1958 - 1963	Besuch der Grundschule St. Agritius in Trier
1963 - 1971	Besuch des Humanistischen Friedrich-Wilhelm-Gymnasiums in Trier mit Abschluß Abitur
1971 - 9172	Wehrdienst
ab WS 1972	Studium der Reinen Mathematik an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
März 1980	Diplom-Prüfung in Reine Mathematik
1.1.1981 - 31.12.1984	Wissenschaftlicher Mitarbeiter beim SFB 21 'Ökonomische Prognose- Entscheidungs- und Gleichgewichtsmodelle' der Universität Bonn